Cálculo I
P2 2015
Resolução da Questão 4

Por Rafael Calegari

Enunciado

Use o TVM para mostrar que se $e < a < e^2$, então $a^{\ell n\, a} - e < 4e^3(a - e)$.

Solução

Tomemos a função $f(x) = x^{\ell n\, x} = e^{x^{\ell n\, x}} = e^{(\ell n\, x)^2}$. A função f é contínua em $[e, a]$, sendo $e < a < e^2$. Além disso, f é derivável em $]e, a[$. Nessas condições, pelo Teorema do Valor Médio (TVM), podemos afirmar que existe $c \in]e, a[$ tal que:

$$f(a) - f(e) = f'(c)(a - e)$$
$$\Rightarrow\ a^{\ell n\, a} - e^{\ell n\, e} = f'(c)(a - e)$$
$$\Rightarrow\ a^{\ell n\, a} - e = f'(c)(a - e) \quad \textbf{(i)}$$

Sabemos que $f'(x)$ é tal que:

$$f'(x) = \left(e^{(\ell n\, x)^2}\right)' = e^{(\ell n\, x)^2} \cdot 2\frac{\ell n\, x}{x} = \left(x^{\ell n\, x}\right) \cdot 2\frac{\ell n\, x}{x}$$
$$\Rightarrow\ f'(x) = \frac{2\ell n\, x}{x} \cdot x^{\ell n\, x}$$
$$\Rightarrow\ f'(c) = \frac{2\ell n\, c}{c} \cdot c^{\ell n\, c}$$

Notemos que $f'(x) > 0$ para qualquer x tal que $x > 1$ (nesse intervalo, $\ell n\, x > 0$). Isso significa que f é estritamente crescente em $[1, +\infty]$.

Como $e < c < a < e^2$ e $1 < e$, podemos garantir que $1 < e < c < a < e^2$. Assim, aplicando a função f a todos os termos da inequação, o sinal não se altera:

$$f(1) < f(e) < f(c) < f(a) < f(e^2)$$
$$\Rightarrow\ f(c) < f(e^2)$$
$$\Rightarrow\ c^{\ell n\, c} < \left(e^2\right)^{\ell n\, e^2}$$
$$\Rightarrow\ c^{\ell n\, c} < e^{2\cdot(\ell n\, e^2)}$$
$$\Rightarrow\ c^{\ell n\, c} < e^{\ell n\, e^4}$$

Lembrando que $e^{\ell n\, a} = a$, $\forall a > 0$, podemos escrever que $e^{\ell n\, e^4} = e^4$. Logo:

$$c^{\ell n\, c} < e^4 \quad \textbf{(ii)}$$

Para a desigualdade $c < e^2$, podemos aplicar a função ℓn, que é crescente para as condições em questão:

$$c < e^2$$
$$\ell n\, c < \ell n\, e^2$$
$$\ell n\, c < 2 \quad \textbf{(iii)}$$

Usando a desigualdade obtida em **(ii)**, e lembrando que $\frac{2\ell n\, c}{c} > 0$, uma vez que $c > 1$, temos:

$$c^{\ell n\, c} < e^4$$
$$\frac{2\ell n\, c}{c} \cdot c^{\ell n\, c} < \frac{2\ell n\, c}{c} \cdot e^4$$
$$f'(c) < \frac{2\ell n\, c}{c} \cdot e^4 \quad \textbf{(iv)}$$

Utilizando, agora, a desigualdade obtida em **(iii)**, podemos afirmar que:

$$\ell n\, c < 2$$
$$2\ell n\, c < 4$$
$$2\ell n\, c \cdot e^4 < 4e^4$$

Como $c > 1$, podemos dividir todos os membros da última inequação por c, sem alterar seu sinal:

$$\frac{2\ell n\, c}{c} \cdot e^4 < \frac{4e^4}{c} \quad \textbf{(v)}$$

Além disso, como $c > 1$, certamente $\frac{4e^4}{c} < 4e^4$ **(vi)**.

Unindo as informações obtidas em **(iv)**, **(v)** e **(vi)**:

$$f'(c) < \frac{2\ell n\, c}{c} \cdot e^4 < \frac{4e^4}{c} < 4e^4$$
$$f'(c) < 4e^4 \quad \textbf{(vii)}$$

De **(i)** e **(vii)**, temos:

$$f'(c) < 4e^4$$
$$f'(c)(a - e) < 4e^4(a - e)$$
$$\boxed{a^{\ell n\, a} - e < 4e^4(a - e) \ \text{(c.q.d)}}$$