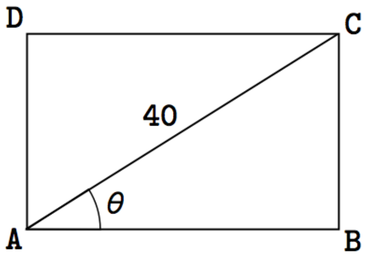
Cálculo I
P2 2015
Resolução da Questão 3

Por Rafael Calegari

Enunciado

A superfície lateral de um cilindro circular reto é obtida unindo-se os lados AD e BC de um retângulo $ABCD$. Dentro todos os retângulos de diagonal 40 cm, determine o ângulo θ (ver figura) que permite construir um cilindro de volume máximo.



Solução

Denotemos por R o raio da base do cilindro e por H sua altura.

Sabemos que $AB = 2\pi \cdot R$. Além disso:

$$\cos\theta = \frac{AB}{40} \;\Rightarrow\; AB = 40\cos\theta$$

Então:

$$40\cdot\cos\theta = 2\pi\cdot R \;\Rightarrow\; R = \frac{20\cos\theta}{\pi} \quad \textbf{(i)}$$

Sabemos, ainda, que $BC = H$ e que:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{BC}{40} \;\Rightarrow\; BC = 40\operatorname{sen}\theta$$

Logo:

$$H = 40\operatorname{sen}\theta \quad \textbf{(ii)}$$

Das equações **(i)** e **(ii)**, temos:

$$V = \pi R^2 H = \pi\left(\frac{20\cos\theta}{\pi}\right)^2 40\operatorname{sen}\theta = \frac{16000}{\pi}\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta$$

Vamos, agora, analisar a função $V(\theta)$ recém obtida:

$$V(\theta) = \frac{16000}{\pi}\operatorname{sen}\theta\,\cos^2\theta$$

$$\Rightarrow\; V'(\theta) = \frac{16000}{\pi}(\cos^3\theta - 2\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta)$$

$$\Rightarrow\; V'(\theta) = \frac{16000}{\pi}\cos\theta(\cos^2\theta - 2\operatorname{sen}^2\theta)$$

center $\Rightarrow\; V'(\theta) = \frac{16000}{\pi}\cos\theta(1 - 3\operatorname{sen}^2\theta)$

A fim de determinar os pontos críticos de $V(\theta)$, faremos $V(\theta) = 0$:

$$V'(\theta) = \frac{16000}{\pi}\cos\theta(1 - 3\operatorname{sen}^2\theta) = 0$$

$$\Rightarrow\; \cos\theta = 0 \text{ ou } 1 - 3\operatorname{sen}^2\theta = 0$$

$$\Rightarrow\; \cos\theta = 0 \text{ ou } \operatorname{sen}^2\theta = 1/3$$

$$\Rightarrow\; \theta = 0 \text{ ou } \theta = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \text{ ou}$$

$$\theta = \operatorname{arc\,sen}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Observamos que, a princípio, a função $V(\theta)$ possui três pontos críticos. Porém, como θ é, necessariamente, um ângulo agudo (isto é, $0 < \theta < \pi/2$), concluímos que $\operatorname{sen}\theta > 0$. Assim, o único ponto crítico da função $V(\theta)$ será $\theta = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Podemos, ainda, verificar que este ponto crítico é ponto de máximo de $V(\theta)$:

	0 … $\operatorname{arcsen}(1/\sqrt{3})$	$\operatorname{arcsen}(1/\sqrt{3})$ … $\pi/2$
$\cos\theta$	+	+
$1-\operatorname{sen}^3\theta$	+	−
V'	+	−
V	↗	↘

Desse modo, para que se tenha um cilindro de volume máximo, é preciso que $\boxed{\theta = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}$.