Cálculo I
P2 2015
Resolução da Questão 2

Por Rafael Calegari

Enunciado

Calcule, caso exista, o seguinte limite:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left(\frac{5\pi}{2}-5x\right)^{\cos(x)}$$

Solução

Vamos utilizar o fato de que $e^{\ell n(u)} = u,\ \forall\ u > 0$.

Nesse caso, pode-se dizer que $u = \left(\frac{5\pi}{2}-5x\right)^{\cos(x)}$, pois $\left(\frac{5\pi}{2}-5x\right) > 0$, se $x \to \frac{\pi}{2}^-$. Assim, temos:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left(\frac{5\pi}{2}-5x\right)^{\cos(x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} e^{\ell n\left(\frac{5\pi}{2}-5x\right)^{\cos(x)}}$$

Sabendo que $\ell n\,(u)^a = a\cdot \ell n\,(u)$:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} e^{\ell n\left(\frac{5\pi}{2}-5x\right)^{\cos(x)}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} e^{\cos(x)\cdot\ell n\left(\frac{5\pi}{2}-5x\right)}$$

Vamos analisar $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\cos(x)\cdot\ell n\left(\frac{5\pi}{2}-5x\right)$.

Observamos que:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\ell n\left(\frac{5\pi}{2}-5x\right) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\cos(x) = 0$$

Assim, temos uma indeterminação do tipo "$0\cdot\infty$". Para resolver o limite em questão, vamos manipulá-lo:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\cos(x)\cdot\ell n\left(\frac{5\pi}{2}-5x\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\ell n\left(\frac{5\pi}{2}-5x\right)}{1/\cos(x)}$$

Agora podemos aplicar a Regra de L'Hospital, uma vez que o limite é uma indeterminação do tipo "∞/∞":

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\ell n\left(\frac{5\pi}{2}-5x\right)}{1/\cos(x)} \overset{\text{LH}}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\left(\ell n\left(\frac{5\pi}{2}-5x\right)\right)'}{\left(1/\cos(x)\right)'} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\frac{-5}{\frac{5\pi}{2}-5x}}{\frac{\text{sen}\ x}{\cos^2 x}}$$

Simplificando o limite obtido anteriormente, temos:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\frac{-5}{\frac{5\pi}{2}-5x}}{\frac{\text{sen}\ x}{\cos^2 x}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\cos^2 x}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\text{sen}\ x}$$

Observa-se facilmente que este limite é uma indeterminação do tipo "$0/0$". Logo, podemos aplicar a Regra de L'Hospital novamente:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\cos^2 x}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\text{sen}\ x} \overset{\text{LH}}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{-2\,\text{sen}\ x\cos x}{\text{sen}\ x+\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos x} = 0$$

Dessa maneira, o limite $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\cos(x)\cdot\ell n\left(\frac{5\pi}{2}-5x\right)$ é igual a zero e temos:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} e^{\cos(x)\cdot\ell n\left(\frac{5\pi}{2}-5x\right)} = e^0 = 1$$

Concluímos que:

$$\boxed{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left(\frac{5\pi}{2}-5x\right)^{\cos(x)} = e^0 = 1}$$