

Cálculo I

P2 2015

Resolução da Questão 1

Por Rafael Calegari

Enunciado

a) Encontre o ponto de mínimo de $g(x) = 3x^2 + 1 - \ln(x)$ e conclua que $g(x) > 0$, para todo $x \in]0; +\infty[$;

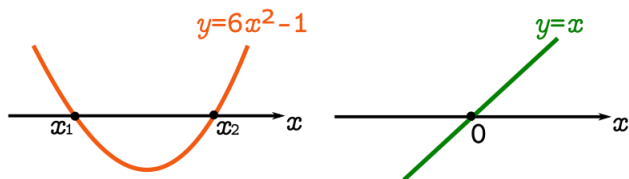
b) Esboce o gráfico de $f(x) = 3x + \frac{\ln(x)}{x}$, determinando seu domínio, os intervalos de crescimento e de decréscimo de f , concavidades e assíntotas (caso existam).

Solução

a) Vamos encontrar $g'(x)$:

$$g'(x) = 6x - \frac{1}{x} \Rightarrow g'(x) = \frac{6x^2 - 1}{x}$$

Sabe-se que $y = 6x^2 - 1$ é uma parábola cuja concavidade é voltada pra cima, sendo $x_1 = -\frac{\sqrt{6}}{6}$ e $x_2 = \frac{\sqrt{6}}{6}$ suas raízes. Além disso, $y = x$ é uma reta crescente, cuja raiz é $x = 0$. Abaixo estão esboçados os gráficos dessas curvas:



Vamos, agora, analisar o sinal de $g'(x)$:

	x_1	0	x_2	
$6x^2 - 1$	+	-	-	+
x	-	-	+	+
$g'(x)$	-	+	-	+
$g(x)$	↘	↗	↘	↗

Note que para $g'(x) < 0$ a função é decrescente e que para $g'(x) > 0$ a função é crescente. Assim, os candidatos a ponto de mínimo de g são $x_1 = -\frac{\sqrt{6}}{6}$ e $x_2 = \frac{\sqrt{6}}{6}$.

Observando a lei de formação de $g(x)$, concluiremos que seu domínio é $D_g =]0; +\infty[$. Dessa forma, o ponto de mínimo de g é $x = \frac{\sqrt{6}}{6}$.

Vamos calcular $g\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$:

$$g\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right) = 3 \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2 + 1 - \ln\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right) = \frac{3}{2} - \ln\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$$

Como $\frac{\sqrt{6}}{6}$ é menor que 1, temos $\ln\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right) < 0$. Então:

$$\begin{aligned} -\ln\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right) &> 0 \\ \Rightarrow \frac{3}{2} - \ln\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right) &> \frac{3}{2} \\ \Rightarrow g\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right) &> \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Se $x = \frac{\sqrt{6}}{6}$ é ponto de mínimo da função g e $g\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right) > 0$, pode-se concluir que para qualquer outro $x \in D_g$ a função g é maior que zero, isto é: verificamos que $g(x) > 0$, para todo $x \in]0; +\infty[$.

b) Para esboçar o gráfico de $f(x)$, vamos seguir os passos abaixo:

(i) **Encontrar o domínio da função:** Pela lei de formação de f , conclui-se que x deve ser maior que zero. Assim:

$$D_f =]0; +\infty[$$

(ii) **Encontrar os intervalos de crescimento e decréscimo:** Para tanto, devemos analisar $f'(x)$:

$$f'(x) = 3 + \frac{1 - \ln(x)}{x^2} = \frac{3x^2 + 1 - \ln(x)}{x^2}$$

Pelo item a), concluímos que $f'(x)$ é sempre maior que zero para qualquer $x \in D_f$, isto é, f é estritamente crescente.

(iii) **Analisar as concavidades:** Para essa análise, vamos encontrar $f''(x)$:

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x} \cdot x^2 - (1 - \ln(x)) \cdot 2x}{x^4} = \frac{2\ln(x) - 3}{x^3}$$

Devemos observar onde $f''(x) > 0$ e $f''(x) < 0$:

- Como $x > 0$, temos $x^3 > 0$;
- Para $2\ln(x) - 3 > 0$, temos $x > e^{3/2}$.

Com base nas informações acima, concluiremos que $f''(x) > 0$ nos pontos em que $2\ln(x) - 3 > 0$. Esquematizando uma tabela:

	0	$e^{3/2}$
$f''(x)$	-	+
$f(x)$	↖	↘

Logo, f tem concavidade voltada pra baixo em $]0; e^{3/2}[$ e concavidade voltada pra cima em $]e^{3/2}; +\infty[$. Além disso, como $f''(e^{3/2}) = 0$, $x = e^{3/2}$ é ponto de inflexão de f .

(iv) **Encontrar as assíntotas da função:** Como $D_f =]0; +\infty[$, vamos calcular o limite $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 3x + \frac{\ln(x)}{x} = -\infty$$

Devemos, agora, procurar por assíntotas para $x \rightarrow +\infty$.

As possíveis assíntotas serão da forma $y = mx + n$, sendo:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ e } n = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - mx$$

$$\bullet m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 + \frac{\ln(x)}{x^2} = 3 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}$$

O limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}$ é do tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Assim, pela Regra de L'Hospital, temos:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x^2} = 0$$

Concluiremos, então, que:

$$m = 3 + 0 \Rightarrow \boxed{m = 3}$$

$$\bullet n = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - mx = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 3x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x}$$

O limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x}$ é do tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Então, pela Regra de L'Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\therefore \boxed{n = 0}$$

Assim, encontramos a reta $y = 3x$ como assíntota para $x \rightarrow +\infty$.

Reunindo todas as informações obtidas em (i), (ii), (iii) e (iv),

podemos esboçar o gráfico de $f(x) = 3x + \frac{\ln(x)}{x}$:

