# Cálculo I
# P2 2015
## Resolução da Questão 1
*Por Rafael Calegari*

### *Enunciado*

a) Encontre o ponto de mínimo de $g(x) = 3x^2 + 1 - \ell n(x)$ e conclua que $g(x) > 0$, para todo $x \in ]0; +\infty[$;

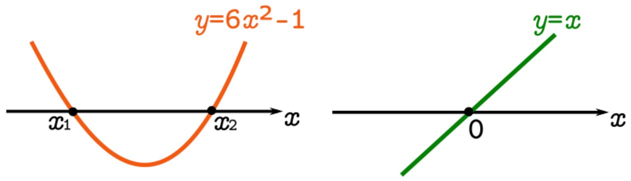
b) Esboce o gráfico de $f(x) = 3x + \dfrac{\ell n(x)}{x}$, determinando seu domínio, os intervalos de crescimento e de decrescimento de $f$, concavidades e assíntotas (caso existam).

### *Solução*

a) Vamos encontrar $g'(x)$:

$$g'(x) = 6x - \frac{1}{x} \Rightarrow g'(x) = \frac{6x^2 - 1}{x}$$

Sabe-se que $y = 6x^2 - 1$ é uma parábola cuja concavidade é voltada pra cima, sendo $x_1 = -\dfrac{\sqrt{6}}{6}$ e $x_2 = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$ suas raízes. Além disso, $y = x$ é uma reta crescente, cuja raiz é $x = 0$. Abaixo estão esboçados os gráficos dessas curvas:




Vamos, agora, analisar o sinal de $g'(x)$:

| | $x_1$ | 0 | $x_2$ | |
|---|---|---|---|---|
| $6x^2-1$ | + | − | − | + |
| $x$ | − | − | + | + |
| $g'(x)$ | − | + | − | + |
| $g(x)$ | ↘ | ↗ | ↘ | ↗ |

Note que para $g'(x) < 0$ a função é decrescente e que para $g'(x) > 0$ a função é crescente. Assim, os candidatos a ponto de mínimo de $g$ são $x_1 = -\dfrac{\sqrt{6}}{6}$ e $x_2 = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

Observando a lei de formação de $g(x)$, concluiremos que seu domínio é $D_g = ]0; +\infty[$. Dessa forma, o ponto de mínimo de $g$ é $x = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

Vamos calcular $g\left(\dfrac{\sqrt{6}}{6}\right)$:

$$g\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right) = 3 \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2 + 1 - \ell n\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right) = \frac{3}{2} - \ell n\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$$

Como $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$ é menor que 1, temos $\ell n\left(\dfrac{\sqrt{6}}{6}\right) < 0$. Então:

$$-\ell n\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right) > 0$$
$$\Rightarrow \frac{3}{2} - \ell n\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right) > \frac{3}{2}$$
$$\Rightarrow g\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right) > \frac{3}{2}$$

Se $x = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$ é ponto de mínimo da função $g$ e $g\left(\dfrac{\sqrt{6}}{6}\right) > 0$, pode-se concluir que para qualquer outro $x \in D_g$ a função $g$ é maior que zero, isto é: verificamos que $g(x) > 0$, para todo $x \in ]0; +\infty[$.

b) Para esboçar o gráfico de $f(x)$, vamos seguir os passos abaixo:

**(i) Encontrar o domínio da função:** Pela lei de formação de $f$, conclui-se que $x$ deve ser maior que zero. Assim:

$$D_f = ]0; +\infty[$$

**(ii) Encontrar os intervalos de crescimento e decrescimento:** Para tanto, devemos analisar $f'(x)$:

$$f'(x) = 3 + \frac{1 - \ell n(x)}{x^2} = \frac{3x^2 + 1 - \ell n(x)}{x^2}$$

Pelo item a), concluímos que $f'(x)$ é sempre maior que zero para qualquer $x \in D_f$, isto é, $f$ é estritamente crescente.

**(iii) Analisar as concavidades:** Para essa análise, vamos encontrar $f''(x)$:

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x} \cdot x^2 - (1 - \ell n(x)) \cdot 2x}{x^4} = \frac{2\ell n(x) - 3}{x^3}$$

Devemos observar onde $f''(x) > 0$ e $f''(x) < 0$:

- Como $x > 0$, temos $x^3 > 0$;
- Para $2\ell n(x) - 3 > 0$, temos $x > e^{3/2}$.

Com base nas informações acima, concluiremos que $f''(x) > 0$ nos pontos em que $2\ell n(x) - 3 > 0$. Esquematizando uma tabela:

| | 0 | $e^{3/2}$ |
|---|---|---|
| $f''(x)$ | − | + |
| $f(x)$ | ⌢ | ⌣ |

Logo, $f$ tem concavidade voltada pra baixo em $]0; e^{3/2}[$ e concavidade voltada pra cima em $]e^{3/2}; +\infty[$. Além disso, como $f''\left(e^{3/2}\right) = 0$, $x = e^{3/2}$ é ponto de inflexão de $f$.

**(iv) Encontrar as assíntotas da função:** Como $D_f = ]0; +\infty[$, vamos calcular o limite $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ :

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} 3x + \frac{\ell n(x)}{x} = -\infty$$

Devemos, agora, procurar por assíntotas para $x \to +\infty$. As possíveis assíntotas serão da forma $y = mx + n$, sendo:

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{e} \quad n = \lim_{x \to +\infty} f(x) - mx$$

• $m = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} 3 + \dfrac{ln(x)}{x^2} = 3 + \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{ln(x)}{x^2}$

O limite $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{ln(x)}{x^2}$ é do tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$. Assim, pela Regra de L'Hospital, temos:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{ln(x)}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2x^2} = 0$$

Concluiremos, então, que:

$$m = 3 + 0 \Rightarrow \boxed{m = 3}$$

• $n = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - mx = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - 3x = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{ln(x)}{x}$

O limite $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{ln(x)}{x}$ é do tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$. Então, pela Regra de L'Hospital:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{ln(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\therefore \boxed{n = 0}$$

Assim, encontramos a reta $y = 3x$ como assíntota para $x \to +\infty$.

Reunindo todas as informações obtidas em **(i)**, **(ii)**, **(iii)** e **(iv)**, podemos esboçar o gráfico de $f(x) = 3x + \dfrac{ln(x)}{x}$: