L6Q5 – Resolução

Usamos a seguinte fórmulas para calcular a elasticidade de substituição, σ . É importante apontar que nela a TMST é “de L por K”, o inverso da TMST que foi calculada na L6Q1.

$$\sigma = \frac{\partial \ln(K/L)}{\partial \ln TMST}$$

As TMSTs foram calculadas na L6Q1, então aqui usamos elas, invertidas, evitando refazer contas que já foram feitas.

a)

$$q = K^{\alpha} L^{\beta} \qquad TMST = \frac{\beta K}{\alpha L}$$

$$\ln TMST = \ln\left(\frac{\beta K}{\alpha L}\right) = \ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) + \ln\left(\frac{K}{L}\right)$$

$$\sigma = \frac{\partial\left[\ln\left(\frac{K}{L}\right)\right]}{\partial\left[\ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) + \ln\left(\frac{K}{L}\right)\right]} = 1$$

Esta derivada pode parecer estranha, porque ela é uma função sendo derivada em relação a outra função. Perceba que a função “de cima” está dentro da função “de baixo” de forma linear – sem multiplicar outros termos ou com expoente diferente de 1, por exemplo. Por isso, o valor da derivada é 1. Uma outra forma de ver o valor dessa derivada, mais longo mas talvez mais claro é reescrever as funções. Usarei as letras x e y para reescrever as funções da derivada.

Seja $x = \ln TMST$

Seja $y = \ln\left(\frac{K}{L}\right)$

$$x = \ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) + \ln\left(\frac{K}{L}\right)$$

$$y = x - \ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$$

Reescrevemos σ como

$$\sigma = \frac{\partial \ln(K/L)}{\partial \ln TMST} = \frac{\partial y}{\partial x} = 1$$

b)

$$q = \alpha K + \beta L \qquad\qquad TMST = \frac{\beta}{\alpha}$$

$$\sigma = \frac{\partial \ln(K/L)}{\partial \ln TMST}$$

Note que $\ln TMST$ é constante, o que torna o cálculo da derivada inválido. Como podemos medir a sensibilidade da razão de alocação dos insumos, K/L, a mudanças na TMST se a TMST não muda?

Recorremos então à teoria. A função de produção de substitutos perfeitos admite uma substituição perfeita entre K e L, a mesma taxa de substituição em qualquer ponto da curva, então a elasticidade de substituição dela é infinita.

$$\sigma = \frac{\partial \ln\left(\frac{K}{L}\right)}{\partial \ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)} = \infty$$

Você pode entender o cálculo desta derivada como se a variação na TMST fosse zero, o que causa uma "divisão por zero". Dada a "divisão por zero", como o numerador é positivo, o valor da derivada é infinito.

c)

$$q = \min(\alpha K, \beta L) \qquad\qquad \nexists\, TMST$$

$$\sigma = \frac{\partial \ln(K/L)}{\partial \ln TMST}$$

Note que a TMST da função de produção de proporções fixas não existe, o que torna o cálculo da derivada inválido. Como podemos medir a sensibilidade da razão de alocação dos insumos, K/L, a mudanças na TMST se a razão K/L não muda?

Recorremos então à teoria. A função de produção de proporções fixas, como o nome indica, apresenta uma razão K/L constante para qualquer nível de produção. E não admite qualquer substituição entre K e L, então a elasticidade de substituição dela é zero.

$$\ln\left(\frac{K}{L}\right) = \ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$$

$$\sigma = \frac{\partial \ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)}{\partial \ln TMST} = 0$$

Você pode entender o cálculo desta derivada como se a variação na razão K/L fosse zero, o que faz com que o numerador seja constante. Dado o numerador constante, o valor da derivada é zero.

d)

$$q = (K^{\rho} + L^{\rho})^{\frac{\gamma}{\rho}} \qquad TMST = \left(\frac{L}{K}\right)^{\rho-1}$$

$$\ln TMST = (\rho - 1) * \ln\left(\frac{L}{K}\right)$$

$$\sigma = \frac{\partial\left[\ln\left(\frac{K}{L}\right)\right]}{\partial\left[(\rho - 1) * \ln\left(\frac{L}{K}\right)\right]}$$

Mais uma vez, esta derivada pode parecer estranha, porque ela é uma função sendo derivada em relação a outra função. Para resolve-la vamos reescrever as funções em termos de x e y.

$$\text{Seja } x = \ln TMST$$

$$\text{Seja } y = \ln\left(\frac{K}{L}\right)$$

$$x = (\rho - 1) * \ln\left(\frac{L}{K}\right)$$

Temos agora que “fazer aparecer” $\ln\left(\frac{K}{L}\right)$ na equação para conseguimos escrever y em função de x.

$$\ln\left(\frac{L}{K}\right) = \frac{x}{\rho - 1}$$

$$\ln\left(\frac{K}{L}\right) = -\ln\left(\frac{L}{K}\right) = -\frac{x}{\rho - 1} = \frac{x}{1 - \rho}$$

$$y = \frac{x}{1 - \rho}$$

$$\sigma = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{1 - \rho}$$