estudar.com.vc

Álgebra Linear I

Resumo e Exercícios P2

Fórmulas e Resuminho Teórico Parte 1

Mudança de base

Colocar as coordenadas do vetor em notação matricial

$$[\vec{v}]_B = \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{bmatrix}, [\vec{v}]_F = \begin{bmatrix} x_F \\ y_F \\ z_F \end{bmatrix}$$

$[\vec{v}]_B = M_{BF}[\vec{v}]_F$, tal que a matriz de mudança de base é construída colocando as coordenadas dos vetores da base de saída na base de chegada.

$$M_{BF} = \begin{bmatrix} [\overrightarrow{f_1}]_B & [\overrightarrow{f_2}]_B & [\overrightarrow{f_3}]_B \end{bmatrix}$$

Propriedades

- $M_{BF} = M_{FB}^{-1}$
- $M_{BF} = M_{BG}M_{GF}$

Orientação de V^3

B e F tem mesma orientação ⇔ $\det(M_{BF}) > 0$ (orientação positiva)
B e F tem orientações opostas ⇔ $\det(M_{BF}) < 0$ (orientação negativa)

Produto Vetorial

$$\vec{x} = \vec{u} \wedge \vec{v}, \text{ tal que } \begin{cases} \|\vec{x}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| sen\theta \\ \vec{x} \perp \vec{u} \; e \; \vec{x} \perp \vec{v} \\ (\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}) \text{ é } base \; positiva \end{cases}$$

Se $\vec{u}\hat{}\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \{\vec{u}, \vec{v}\}$ é LD (paralelos)

$A = \|\vec{u}\hat{}\vec{v}\|$ é a área do paralelogramo formado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$

$\frac{\|\vec{u}\hat{}\vec{v}\|}{2}$ é a área do triângulo formado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$

$A = b.h,\ h = \frac{\|\overrightarrow{AB}\hat{}\overrightarrow{AC}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}$ é a altura do triângulo ABC em relação a base AB

Se estiver em uma ***base ortonormal positiva***

$\vec{u}\hat{}\vec{v} = \text{"}det\text{"}\begin{bmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{bmatrix}$, onde $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)_B$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)_B$

Resolvendo por cofatores na primeira linha,

$\vec{u}\hat{}\vec{v} = \det\begin{pmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{pmatrix}\hat{\imath} - det\begin{pmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{pmatrix}\hat{\jmath} + det\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}\hat{k}$

Propriedades

- $\vec{u}\hat{}\vec{v} = -\vec{v}\hat{}\vec{u}$
- $(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b})\hat{}\vec{v} = \alpha\vec{a}\hat{}\vec{v} + \beta\vec{b}\hat{}\vec{v}$

<u>Produto Misto</u>

$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u}\hat{}\vec{v} * \vec{w}$

$V = |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|$ é o volume do paralelepípedo formado por $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$

$V = A.h, \quad h = \frac{|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]|}{\|\vec{u}\hat{}\vec{v}\|}$

Volume do tetraedro

$V = \frac{|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]|}{6}$

Se estiver em uma ***base ortonormal positiva***

$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = det\begin{bmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_w & y_w & z_w \end{bmatrix}$

Propriedades

- $[\alpha\vec{a} + \beta\vec{b},\vec{v},\vec{w}] = \alpha[\vec{a},\vec{v},\vec{w}] + \beta[\vec{b},\vec{v},\vec{w}]$
- $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = -[\vec{v},\vec{u},\vec{w}] = [\vec{v},\vec{w},\vec{u}]$ (Altera o sinal ao alterar uma posição)
- $\vec{u}\wedge\vec{v} * \vec{w} = \vec{u} * \vec{v}\wedge\vec{w}$
- $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$ não se altera ao adicionar uma combinação linear dos outros vetores
  $[\vec{u},\vec{v} + \lambda\vec{u} + \alpha\vec{w},\vec{w}] = [\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$

Produto Misto na mudança de base

$\det(M_{BF}) = \frac{[\vec{f_1},\vec{f_2},\vec{f_3}]}{[\vec{b_1},\vec{b_2},\vec{b_3}]}$

(Produto misto da base de saída / produto misto da base de chegada)

Se V^3 está orientado,

$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] > 0 \Leftrightarrow (\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ é base positiva

$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] < 0 \Leftrightarrow (\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ é base negativa

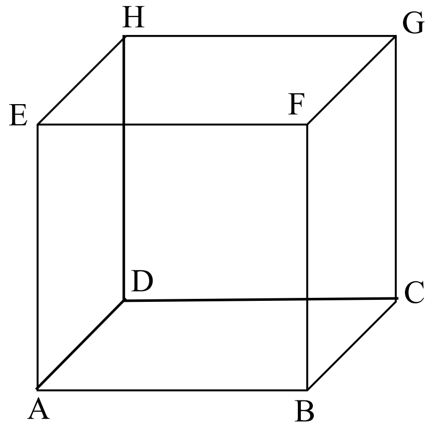
$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = 0 \Leftrightarrow \{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ é LD

Exercícios Parte 1

1. Mudança de base

Prova 0 P2 2016 Álgebra Linear para Engenharia I, exercício 14

Considere no espaço E^3 um cubo cujos vértices são A, B, C, D, E, F, G, H em que ABCD, ADHE e ABFE são faces desse cubo, como ilustrado na figura abaixo:



Seja B e C as bases de V^3dadas por:

$$B = \{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH}\} \text{ e } C = \{\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{DG}\}.$$

Se M_{BC} é a matriz real 3x3 tal que

$$M_{BC}[\vec{v}]_C = [\vec{v}]_B,$$

para todo $\vec{v} \in V^3$,então o determinante de M_{BC} é igual a:

A. 1
B. -1
C. 3
D. 2
E. -2

2. Mudança de base

Prova 0 P2 2015 Álgebra Linear para Engenharia I, exercício 4

Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, considere os vetores:

$$\overrightarrow{e_1} = (1, \alpha, -1), \qquad \overrightarrow{e_2} = (\alpha, 0,1), \qquad \overrightarrow{e_3} = (1,1,1)$$

Assinale a alternativa correspondente ao conjunto de valores de α que faz de $B = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ uma base positiva de V^3:

A. $]-\infty, -\frac{1}{2}[\, \cup \,]\frac{1}{2}, +\infty[$

B. vazio

C. $]-\infty, -2[\, \cup \,]2, +\infty[$

D. $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

E. $[-2,2]$

3. Produto vetorial

Prova 0 P2 2016 Álgebra Linear para Engenharia I, exercício 15

Considere as seguintes afirmações:

I. Para quaisquer $\vec{v}, \vec{w}, \vec{z} \in V^3$, se $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são linearmente independentes, $\vec{z} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ e $\vec{z} \wedge \vec{w} = \vec{0}$, então $\vec{z} = \vec{0}$;

II. Para quaisquer $\vec{v}, \vec{w} \in V^3$, vale que $(\vec{v} + \vec{w}) \wedge (\vec{v} - \vec{w}) = -2\vec{w} \wedge \vec{v}$;

III. Para quaisquer $\vec{v}, \vec{w} \in V^3$, se $\vec{v}.\vec{w} = 0$ e $\vec{v} \wedge \vec{w} = \vec{0}$, então $\vec{v} = \vec{0}$ ou $\vec{w} = \vec{0}$

Assinale a alternativa correta:

A. Apenas as afirmações I. e III. são verdadeiras

B. Apenas a afirmação III. é verdadeira

C. Apenas a afirmação I. é verdadeira

D. Apenas as afirmações I. e II. são verdadeiras

E. Apenas as afirmações II. e III. são verdadeiras

4. Produto vetorial

Prova 0 P2 2015 Álgebra Linear para Engenharia I, exercício 5

Considere os pontos $A = (1,2,-1), B = (-1,0,-1)$ e $C = (2,1,2)$. A altura do triângulo ABC relativa à base BC é igual a:

A. $2\sqrt{\frac{22}{19}}$

B. $\sqrt{\frac{22}{19}}$

C. $\frac{\sqrt{22}}{19}$

D. $2\frac{\sqrt{22}}{19}$

E. $\sqrt{\frac{19}{22}}$

5. Produto vetorial

Prova 0 P2 2015 Álgebra Linear para Engenharia I, exercício 13

Sejam $\vec{v},\vec{w},\vec{z},\overrightarrow{z_1},\overrightarrow{z_2} \in V^3$. Considere as seguintes afirmações:

I. Se $[\vec{v},\vec{w},\vec{z}] = 5$, então $[\vec{v},\vec{w} + 2\vec{z},\vec{z} - 3\vec{v}] = 5$;

II. Se $[\vec{v},\vec{w},\overrightarrow{z_1}] = 2$ e $[\vec{v},\vec{w},\overrightarrow{z_2}] = 3$, então $[\vec{v},\vec{w},\overrightarrow{z_1} + 3\overrightarrow{z_2}] = 11$;

III. $[\vec{v},\vec{w},\vec{z}] = [\vec{w},\vec{z},\vec{v}]$;

Assinale a alternativa correta:

A. Apenas a afirmação III. é necessariamente verdadeira

B. Apenas a afirmação I. é necessariamente verdadeira

C. Apenas as afirmações I. e III. são necessariamente verdadeiras

D. Todas as afirmações são necessariamente verdadeiras

E. Apenas as afirmações II. e III. são necessariamente verdadeiras

6. Produto misto

Prova 0 P2 2015 Álgebra Linear para Engenharia I, exercício 11

Considere os pontos:

$$A = (1,1,1), \qquad B = (2,2,1), \qquad C = (2,1,2), \qquad D = (1,2,2)$$

e seja h a altura do tetraedro $ABCD$ relativa à base ABC. Pode-se afirmar que:

A. $h < \frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{2} \leq h < 1$

C. $h \geq 2$

D. $\frac{3}{2} \leq h < 2$

E. $1 \leq h < \frac{3}{2}$

Gabarito

1. E

2. B

3. A

4. A

5. D

6. E

Fórmulas e Resuminho Teórico Parte 2

Sistema de Coordenadas

$S = (O, E)$, é o sistema com origem no ponto O e base E.
Se E é **ortonormal**, S é um **sistema ortogonal**

Ponto P = $\overrightarrow{OP} = (x, y, z)_S$
$\overrightarrow{PQ} = (x_Q - x_P, y_Q - y_P, z_Q - z_P)_E$
$P + \lambda\vec{v} = (x + \lambda a, y + \lambda b, z + \lambda c)_S$

Média entre 2 pontos
$M = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$

Se S for **ortogonal**, Distância entre 2 pontos
$dist(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2 + (z_Q - z_P)^2}$

Retas

Equação vetorial
$r: X = A + \lambda\vec{v} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$

Equações paramétricas
$r: \begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \\ z = z_0 + \lambda c \end{cases} (\lambda \in \mathbb{R})$

Equações simétricas

$\lambda = \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$

<u>Planos</u>

Equação vetorial

$\pi: X = A + \lambda\vec{v} + \mu\vec{u} \ \ (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$

Equação paramétrica

$$\pi: \begin{cases} x = x_0 + \lambda a + \mu m \\ y = y_0 + \lambda b + \mu n \ \ (\lambda, \mu \in \mathbb{R}) \\ z = z_0 + \lambda c + \mu p \end{cases}$$

Equação geral

$\pi: ax + by + cz + d = 0$

Vetor normal ao plano

$\vec{n} = \vec{v} \wedge \vec{u}$

Se o sistema S for **ortogonal**,

$\pi: ax + by + cz + d = 0 \Leftrightarrow$ Vetor normal $\vec{n} = (a, b, c)$

Como chegar na equação geral

- Resolver $det \begin{bmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a & b & c \\ m & n & p \end{bmatrix} = 0$

  sendo $\vec{u} = (a, b, c)$ e $\vec{v} = (m, n, p)$

Posições Relativas

Reta-Reta

- $\{\vec{r}, \vec{s}\}$ é LD ⇔ $\vec{r}$ paralelo a $\vec{s}$
  - Possui 1 ponto em comum ⇔ r = s
  - Não possui ponto em comum ⇔ r ∩ s = ∅
- $\{\vec{r}, \vec{s}\}$ é LI, pegue ponto $A \in r$ e $B \in s$
  - $\{\vec{r}, \vec{s}, \overrightarrow{AB}\}$ LI ⇔ r, s são reversas
  - $\{\vec{r}, \vec{s}, \overrightarrow{AB}\}$ LD ⇔ r, s são concorrentes (tem ponto em comum)

Reta-Plano

- $\vec{r} \perp \vec{n}$ ⇔ r paralelo a π
  - Possui 1 ponto em comum ⇔ r contido em π
  - Não possui ponto em comum ⇔ r ∩ π = ∅
- Caso contrário, r e π são transversais (r ∩ $\pi = P$)

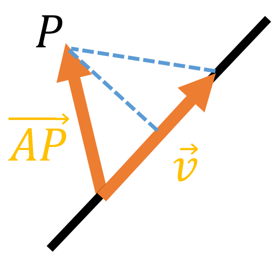
Plano-Plano

- $\{\vec{n_1}, \vec{n_2}\}$ é LD ⇔ planos são paralelos
  - Possui 1 ponto em comum ⇔ $\pi_1 = \pi_2$
  - Não possui ponto em comum ⇔ $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$
- $\{\vec{n_1}, \vec{n_2}\}$ é LI ⇔ $\pi_1 \cap \pi_2 = r$ (intersecção é uma reta)
  - Achar a intersecção => igualar as equações dos planos

Distâncias

Ponto-Reta

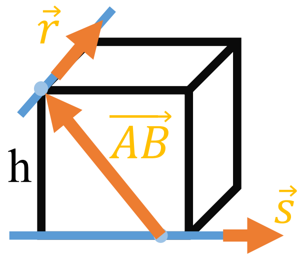
$$d(P, r) = \frac{\|\overrightarrow{AP} \wedge \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}$$ (Altura do triângulo)



Reta-reta

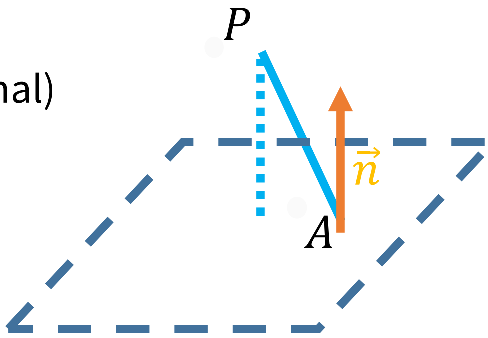
- Se forem paralelas, pegar um ponto A e fazer $d(A, s)$
- Se não,

$$d(r,s) = \frac{|[\overrightarrow{AB}, \vec{r}, \vec{s}]|}{\|\vec{r} \wedge \vec{s}\|}$$ (Altura do paralelepípedo)



Ponto-Plano

$$d(P,\pi) = \frac{|\overrightarrow{AP} * \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$ (Projeção de AP na normal)



Com a equação geral do plano e o ponto,
$\pi: ax + by + cz = 0$
$P = (x_0, y_0, z_0)$

$$d(P,\pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Exercícios Parte 1

1. Posições Relativas

Prova 0 P2 2016 Álgebra Linear para Engenharia I, exercício 13

Seja $m \in \mathbb{R}$ e considere as retas:

$$r: X = (1,1,1) + \lambda(1, m, 0), \quad \lambda \in \mathbb{R},$$
$$s: X = (1,0,2) + \lambda(2, m, 1), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Temos que r e s são reversas se, e somente se:

A. $m \neq 1$
B. $m = 1$
C. $m \neq -1$
D. $m \neq 2$
E. $m \neq 0$

2. Posições Relativas

Prova 0 P2 2016 Álgebra Linear para Engenharia I, exercício 16

Seja π o plano que passa pelo ponto $(1,1,1)$ e contém a reta

$$r: X = (0,1,0) + \lambda(1,1,0), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Se s é a reta dada pela interseção de π com o plano $y = 0$, então um vetor diretor para s é:

A. $(1,1,0)$
B. $(0,0,1)$
C. $(1,0,0)$
D. $(-1,0,1)$
E. $(1,0,1)$

3. Posições Relativas

Prova 0 P2 2016 Álgebra Linear para Engenharia I, exercício 12

Considere o ponto $A = (1,1,1)$ e as retas:

$$r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}; \; s: 2x = y + 1 = \frac{3z}{2}; \;\; t: \begin{cases} x = -3 + \mu \\ y = 1 + \mu \\ z = \mu \end{cases}$$

Denote por π o plano que contém o ponto A e é paralelo às retas r e s. Seja $B = (a, b, c)$ o ponto onde a reta t corta o plano π. Temos que $a + b + c$ é igual a:

A. -9
B. -6
C. 1
D. 4
E. -2

4. Distância

Prova 0 P2 2016 Álgebra Linear para Engenharia I, exercício 2

Seja r a reta que passa pela origem e é paralela ao vetor $(1,1,0)$. Se $P = (a, b, c)$ é um ponto do plano

$$\pi: x - y - z = 0$$

Tal que a distância de P à reta r seja igual a 1, então:

A. $c^2 = 1$

B. $c^2 = \frac{1}{3}$

C. $c^2 = 2$

D. $c = 0$

E. $c^2 = \frac{2}{3}$

5. Distância

Prova 0 P2 2016 Álgebra Linear para Engenharia I, exercício 12

Considere as retas reversas

$$r: \begin{cases} x - z = -1 \\ y - 2z = -2 \end{cases} \quad \text{e} \quad s: \begin{cases} x - z = -2 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

Se $P = (x_1, y_1, z_1) \in r$ e $Q = (x_2, y_2, z_2) \in s$ são os pontos tais que a distância de P a Q seja mínima, então $x_1 + x_2$ é igual a:

A. $-\frac{5}{6}$

B. $\frac{1}{5}$

C. $\frac{1}{6}$

D. $-\frac{1}{3}$

E. $\frac{1}{4}$

6. Distância

Prova 0 P2 2016 Álgebra Linear para Engenharia I, exercício 12

Considere os pontos $A = (1,0,0), B = (0,0,1), P = (1,-1,1)$ e a reta:

$$r: \begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Denote por Q o ponto de r com segunda coordenada positiva tal que a distância entre P e Q seja igual a 3. Temos que a área do triângulo ABQ é igual a:

A. $2\sqrt{6}$
B. $\frac{\sqrt{6}}{2}$
C. $\frac{\sqrt{6}}{4}$
D. $\sqrt{6}$
E. $4\sqrt{6}$

Gabarito

1. A
2. E
3. D
4. E
5. A
6. B