estudar.com.vc

Cálculo 1

Fuja do Nabo

Resumo e Exercícios P2

Fórmulas e Resumo Teórico

Limites Exponenciais e Logarítmicos

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e \quad ou \quad \lim_{x\to0}\,(1+h)^{\frac{1}{h}} = e$$

$$\lim_{x\to0}\frac{(a^x-1)}{x} = \ln(a), \quad \forall\ a>0$$

Derivadas Exponenciais e Logarítmicas importantes

$$(a^x)' = a^x\cdot\ln(a)\,, \qquad \forall\, a>0$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x\cdot\ln(a)}\,, \qquad \forall\, a>0$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$\left(e^{f(x)}\right)' = e^{f(x)}\cdot f'(x)$$

$$\left(\ln\left(f(x)\right)\right)' = \frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x\cdot\ln(a)},$$

$$\left(f(x)^{g(x)}\right)' = \left(f(x)^{g(x)}\right)\cdot\left[g(x)\cdot\ln\left(f(x)\right)\right]'$$

Teorema do Valor Médio (TVM)

Seja uma função $f: [a, b] \rightarrow R$, contínua em todo o seu domínio. Suponhamos f derivável em $]a, b[$. O Teorema do Valor Médio (TVM) diz que, sob essas condições, existe (pelo menos um) $\boldsymbol{c} \in]\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}[$ tal que:

$$f'(\boldsymbol{c}) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

O TVM é útil para provar desigualdades e analisar o crescimento de funções.

Teorema do Valor Intermediário (TVI)

Seja uma função $f: [a, b] \rightarrow R$, contínua em todo o seu domínio. Tomemos $\boldsymbol{\gamma} \in \boldsymbol{R}$ satisfazendo a seguinte desigualdade:

$$f(a) < \boldsymbol{\gamma} < f(b)$$

O Teorema do Valor Intermediário (TVI) diz que, sob tais condições, existe (pelo menos um) $\boldsymbol{c} \in [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ tal que:

$$f(\boldsymbol{c}) = \gamma$$

Isto é, existe pelo menos um $c \in [a, b]$ tal que:

$$f(a) < \boldsymbol{f}(\boldsymbol{c}) < f(b)$$

<u>Consequência principal do TVI</u>: **Teorema do Anulamento (de Bolzano)**

Ainda considerando uma função $f: [a, b] \rightarrow R$, contínua em todo o seu domínio, sejam a e b tais que:

$$\begin{cases} f(a) > 0 \\ f(b) < 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} f(a) < 0 \\ f(b) > 0 \end{cases}$$

Sob essas condições, pode-se afirmar que existe (pelo menos um) $\boldsymbol{c} \in [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ tal que:

$$f(\boldsymbol{c}) = 0$$

Pontos Extremantes: Máximos e Mínimos

Pontos de máximo local
Pontos que maximizam uma função em um dado intervalo.

Pontos de mínimo local
Pontos que minimizam uma função em um dado intervalo.

Pontos de máximo global
Pontos que maximizam uma função em todo o seu domínio.

Pontos de mínimo global
Pontos que minimizam uma função em todo o seu domínio.

Para todo e qualquer ponto $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ que seja extremante (máximo ou mínimo local ou global) de uma função f, vale que:

$$f'(\boldsymbol{a}) = 0 \quad (x = a \text{ é um } \textbf{ponto crítico})$$

Pontos Críticos

Um ponto $x = c$ é ponto crítico de uma função $f(x)$ se, e somente se, $f'(c) = 0$.

$$\boldsymbol{f'(c) = 0 \leftrightarrow x = c} \textbf{ é ponto crítico}$$

Em outras palavras:

“Se $x = c$ é ponto crítico de uma função $f(x)$, o coeficiente angular da reta $\boldsymbol{t}$, tangente ao gráfico de f no ponto $x = c$, que é dado por $f'(c)$, vale zero, isto é: **a reta $\boldsymbol{t}$ é horizontal**.”

Graficamente, pode-se dizer que os pontos para os quais $f'(x) > 0$ são os pontos em que f é crescente. Já os pontos para os quais $f'(x) < 0$ são os pontos nos quais f é decrescente.

$$\begin{cases} f'(x) > 0 \rightarrow \; f \text{ é crescente} \\ f'(x) < 0 \rightarrow \; f \text{ é decrescente} \end{cases}$$

Pontos de Inflexão

Pontos de inflexão são pontos nos quais a derivada segunda de uma função vale zero. Além disso, se $x = c$ é ponto de inflexão, então $f''(c) = 0$.

$$\boldsymbol{f''(c) = 0 \; \leftrightarrow x = c} \textbf{ é ponto de inflexão}.$$

Graficamente, os pontos de inflexão são os pontos em que a **concavidade** do gráfico da função se altera. Além disso, os pontos para os quais $f''(x) > 0$ são pontos em que a concavidade da função f é voltada para cima. Já os pontos para os quais $f''(x) < 0$ são os pontos em que a concavidade da função f é voltada para baixo.

$$\begin{cases} f''(x) > 0 \rightarrow \; \text{concavidade voltada para cima} \\ f''(x) < 0 \rightarrow \; \text{concavidade voltada para baixo} \end{cases}$$

Teorema de Weierstrass

Seja $f: I \subset R \rightarrow R$ uma função contínua no **intervalo fechado** $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \subset \boldsymbol{I}$. O Teorema de Weierstrass afirma que, sob essas condições, existem $\boldsymbol{x_1}$ e $\boldsymbol{x_2}$ pertencentes a $[a, b]$, tais que:

$$\boldsymbol{f(x_1) < f(x) < f(x_2), \;\; \forall\, x \in [a, b]}$$

Em outras palavras:

“Se a função f for **contínua no intervalo fechado** $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$**,** existem x_1 e x_2 pertencentes a esse intervalo tais que $\boldsymbol{f(x_1)}$ **é o valor mínimo de** $\boldsymbol{f}$ em $[a, b]$ e $\boldsymbol{f(x_2)}$ **é o valor máximo de** $\boldsymbol{f}$ em $[a, b]$.”

Ou ainda:

“Se a função f for **contínua no intervalo fechado** $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$**,** existem pontos de máximo e mínimo nesse intervalo: $\boldsymbol{x_1}$ **é ponto de mínimo local** de f e $\boldsymbol{x_2}$ **é ponto de máximo local** de f.”

No caso em que a função $f: I \subset R \rightarrow R$ é contínua em todo o seu domínio I e este domínio é um **intervalo fechado** $[a, b]$, pode-se assegurar que existe (pelo menos um) **ponto de máximo global** de f e (pelo menos um) **ponto de mínimo global** de f.

Regra de L’Hospital

Caso o limite

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

seja uma indeterminação do tipo "$0/0$" ou "$\pm\infty/\infty$", podemos escrever, pela Regra de L’Hospital, que:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

<u>Cuidado:</u> *não confundir com a Regra do Quociente.*

Assíntotas

Uma assíntota é uma reta da qual os pontos do gráfico de uma função se aproximam, mas nunca chegam a “tocá-la”. Podemos definir a assíntota de uma função $f(x)$ como uma reta da forma $\boldsymbol{y = mx + n}$, tal que:

$$\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - (mx + n)] = 0$$

De modo geral, analisamos as assíntotas à esquerda ($x \to -\infty$) do gráfico de f e assíntotas à direita ($x \to +\infty$) do gráfico de f. Assim:

<u>Para assíntotas à esquerda</u>

$$\boldsymbol{m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{n = \lim_{x \to -\infty} f(x) - mx}$$

<u>Para assíntotas à direita</u>

$$\boldsymbol{m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{n = \lim_{x \to +\infty} f(x) - mx}$$

Note que encontrar n depende de encontrar m. Assim, para encontrar os valores de m e n das respectivas assíntotas, devemos, primeiramente, encontrar m e, em seguida, encontrar n. Vale ressaltar que **$\boldsymbol{m}$ e $\boldsymbol{n}$ devem ser números reais**.

Esboço de Gráficos

Para esboçar gráficos, o seguinte roteiro técnico pode ser útil:

(i) Encontrar o domínio da função;
(ii) Estudar o crescimento da função por meio de sua derivada primeira;
(iii) Estudar a concavidade da função por meio de sua derivada segunda;
(iv) Encontrar as assíntotas da função;
(v) Encontrar os limites da função nos extremos de seu domínio;
(vi) Calcular a função em alguns pontos relevantes (geralmente pontos nos quais ocorreu estudo de sinal).

Polinômio de Taylor

Polinômio de Taylor é o polinômio de grau n que **melhor aproxima uma função** ao redor de um ponto $x = a$ interior ao seu domínio. Sua definição é a seguinte:

$$P_{n,a}(x) = f(a) + f^{(1)}(a)(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

ou

$$P_{n,a}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x-a)^k$$

Nessa notação, $f^{(n)}(x)$ denota a derivada de ordem n da função $f(x)$. Além disso, note que n é o grau do Polinômio de Taylor correspondente.

<u>Observações:</u>

1) A função que o Polinômio de Taylor de ordem n pretende aproximar deve ser derivável até ordem n;
2) Quanto maior for a ordem do Polinômio de Taylor, maior será a precisão da aproximação.

Teorema de Taylor

<u>Resto de Lagrange:</u> é uma função $R(x)$ tal que:

$$R(x) = f(x) - P_{n,a}(x)$$

A função Resto de Lagrange indica a diferença entre a função f e o seu Polinômio de Taylor de ordem n.

<u>Teorema de Taylor:</u> Seja uma função $f: I \subset R \rightarrow R$, derivável até ordem $(n+1)$ e $x = a \in I$. O erro ϵ da aproximação da função $f(x)$ usando um Polinômio de Taylor de ordem n ao redor do ponto $x = a$ é tal que:

$$\boldsymbol{\epsilon = |R(x)| = |f(x) - P_{n,a}(x)|}$$

Além disso, pode-se demonstrar que:

$$\epsilon = \left| \frac{f^{(n+1)}(\boldsymbol{c})}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1} \right|$$

Nesse caso, o ponto $x = c$ é um ponto que está **entre a e x**.

estudar.com.vc

Exercícios de Aula – Fuja do Nabo

1. Limites Exponenciais e Logarítmicos

P2 2012

Calcule o seguinte limite:

$$\lim_{x\to 1^-}(2-x)^{tg\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$$

2. Limites Exponenciais e Logarítmicos

P2 2013

Calcule, caso exista:

$$\lim_{x\to 0}(3x+\cos x)^{\frac{1}{sen(35x)}}$$

3. Derivadas Exponenciais e Logarítmicas

P2 2016 - Modificada

Calcule derivada da função $f: R \to R$ dada por $f(x) = (1+\cos^2(x))^{e^{3x}}$

4. Teorema do Valor Médio (TVM)

P2 2014

Mostre que $\frac{\arctan(x)}{x} \leq 1$, para todo $x > 0$.

5. Teorema do Valor Médio (TVM)

P2 2012

Sejam a e b, com $1 \leq a < b \leq e$. Prove que $\frac{\ln b}{b} - \frac{\ln a}{a} \leq \frac{1}{a^2}(b-a)$.

6. Polinômio de Taylor

Item a) - P3 2015

Seja $n \geq 1$ um inteiro. Determine $P_n(x)$ o Polinômio de Taylor de ordem n de $f(x) = e^{2x}$ em torno do ponto $x_0 = 0$. Obtenha uma expressão para o erro $E_n(x) = f(x) - P_n(x)$, em que $x \in R$.

7. Polinômio de Taylor

P2 2016

Use o Polinômio de Taylor, da função $f(x) = \cos(x)$, em torno de $x_0 = 0$, de menor grau possível, para obter uma aproximação de $\cos(0{,}1)$ com erro inferior a 10^{-5}.

8. Pontos de Máximo e Mínimo

P2 2016 - Modificada

Seja $f(x) = e^{2x^3 - 3x^2 - 12x}$ definida no intervalo fechado $[-3; 3]$. Se a é o valor máximo de f e b é o valor mínimo de f, determine o produto ab.

9. Problemas de Otimização

P2 2016 - Modificada

Considere todos os triângulos retângulos formados pelos semi-eixos positivos e por uma reta que passa pelo ponto $(2, 3)$. Dentre todos esses triângulos, determine a hipotenusa daquele que possui área mínima.

10. Esboço de Gráficos

P2 2016

Considere a função $f: R \to R$ dada por $f(x) = \sqrt[3]{x^2} \cdot (x-2)^2$.

a) Determine os intervalos onde f é crescente e onde é decrescente. Determine os pontos de máximo e mínimo locais de f.

b) Determine os intervalos onde f possui concavidade para cima e também onde possui concavidade para baixo. Determine os pontos de inflexão de f.

c) Calcule os limites pertinentes e discuta a existência de assíntotas.

d) Esboce o gráfico de f.

Gabarito

1. O limite é igual a $e^{\frac{2}{\pi}}$.

2. O limite é igual a $e^{\frac{3}{35}}$.

3. A derivada é igual a

$$f'(x) = (1 + \cos^2(x))^{e^x} \cdot \left(e^x \cdot \ln(1 + cos^2(x)) - \frac{2e^x \cdot sen(x)\cos(x)}{1 + \cos^2(x)}\right)$$

4. Demonstração.

5. Demonstração.

6. O Polinômio de Taylor é $P_{n,0} = 1 + 2x + \frac{2^2x^2}{2!} + \frac{(2^3x^3)}{3!} + \cdots + \frac{2^nx^n}{n!}$.

7. A aproximação é $1 - \frac{(0,1)^2}{2!}$.

8. O produto ab é igual a e^{-38}.

9. A hipotenusa é igual a $\sqrt{52}$.

10. a) f é crescente em $]0; \frac{1}{2}[\cup]2; +\infty[$ e decrescente em $] - \infty; 0[\cup]2; +\infty[$.

Além disso, $x = 0$ e $x = 2$ são pontos de mínimo local e $x = \frac{1}{2}$ é ponto de máximo local.

b) f possui concavidade voltada pra cima em $]-\infty; \frac{1}{2}-\frac{3\sqrt{5}}{10}[\ \cup\ ]\frac{1}{2}+\frac{3\sqrt{5}}{10}; +\infty[$ e concavidade voltada pra baixo em $]\frac{1}{2}-\frac{3\sqrt{5}}{10}; \frac{1}{2}+\frac{3\sqrt{5}}{10}[$.

Além disso, $x=\frac{1}{2}\pm\frac{3\sqrt{5}}{10}$ são pontos de inflexão de f.

c) Não há assíntotas.

d) Gráfico.