www.estudar.com.vc

Técnicas de Integração

Exercício 5b Substituição Trigonométrica

Resolução

5.Calcule as seguintes integrais, utilizando substituições trigonométricas:

b. $\int \left(\frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}\right) dx$

Fazendo uma substituição trigonométrica obteremos uma integral mais simples. Neste caso , fazendo $x = 3\cos\theta$ e $dx = -3\sin\theta\, d\theta$:

$$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}\, dx = \int \frac{\sqrt{9-9\cos^2\theta}}{9\cos^2\theta} \cdot (-3\sin\theta)\, d\theta$$

$$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}\, dx = \int \frac{3\sqrt{1-\cos^2\theta}}{9\cos^2\theta} \cdot (-3\sin\theta)\, d\theta$$

$$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}\, dx = \int -\frac{\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\cos^2\theta} \cdot \sin\theta\, d\theta$$

Utilizando a relação trigonométrica $sin^2\theta + cos^2\theta = 1$, temos que:

$$1 - cos^2\theta = \sin^2\theta$$

$$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}\, dx = \int -\frac{\sqrt{\sin^2\theta}}{\cos^2\theta} \cdot \sin\theta\, d\theta$$

$$\int -\frac{\sqrt{\sin^2\theta}}{\cos^2\theta} \cdot \sin\theta\, d\theta = \int -\frac{|\sin\theta|}{\cos^2\theta} \cdot \sin\theta\, d\theta$$

Escolhendo $\theta \in [0, \pi]$, podemos escrever que:

$$|\sin\theta| = \sin\theta$$

Assim,

$$\int -\frac{|\sin\theta|}{\cos^2\theta}\cdot\sin\theta\,d\theta = \int -\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}d\theta = -\int \tan^2\theta\;\,d\theta$$

$$-\int \tan^2\theta\,d\theta = -\int (\sec^2\theta - 1)\;\,d\theta$$

Com isso, chegamos em:

$$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}\,dx = -\int \sec^2\theta\,d\theta + \int 1\;\,d\theta = -\tan\theta + \theta + C,\;\; C \in \mathbb{R}$$

Voltando à variável original: $x = 3\cos\theta$, com $\theta \in [0,\pi]$.

$$\theta = \arccos\left(\frac{x}{3}\right) \Rightarrow \cos\theta = \frac{x}{3}$$

Como $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, podemos escrever:

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \sin^2\theta = 1 \Rightarrow \sin\theta = \frac{\sqrt{9-x^2}}{3}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$$

Por fim,

$$-\tan\theta + \theta + C = -\tan\left(\arccos\left(\frac{x}{3}\right)\right) + \arccos\left(\frac{x}{3}\right) + K, com\ K \in \mathbb{R}$$

Ainda é possível reescrever a expressão:

$$-\tan\left(\arccos\left(\frac{x}{3}\right)\right)+\arccos\left(\frac{x}{3}\right)+K=-\frac{\sqrt{9-x^2}}{x}+\arccos\frac{x}{3}+K$$

Resposta esperada: $\boldsymbol{-\frac{\sqrt{9-x^2}}{x}+\arccos\frac{x}{3}+K, K\in\mathbb{R}}$**.**