www.estudar.com.vc

Técnicas de Integração

Exercício 5c Substituição Trigonométrica

Resolução

5.Calcule as seguintes integrais, utilizando substituições trigonométricas:

c. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}\, dx$

Essa integral é complicada demais para ser feita de imediato. Façamos uma substituição trigonométrica para torná-la mais simples:

$$x = 2\tan\theta\,, com\ \theta\ \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$$

$$dx = 2\sec^2\theta\ d\theta$$

Assim,

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}\,dx \quad = \int \frac{1}{4\tan\theta^2\sqrt{4\tan^2\theta+4}}\cdot(2\sec^2\theta)\,d\theta$$

Usando a identidade $sec^2\theta = tan^2\theta + 1$:

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{\sec^2\theta}{\tan^2\theta\sqrt{\tan^2\theta+1}}\,d\theta = \frac{1}{4}\int \frac{\sec^2\theta}{\tan^2\theta\cdot\sec\theta}\,d\theta$$

Dessa maneira, obtemos:

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{\sec\theta}{\tan^2\theta}\,d\theta = \frac{1}{4}\int \frac{1/\cos\theta}{\sin^2\theta/\cos^2\theta}\,d\theta = \frac{1}{4}\int \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\,d\theta$$

Agora, precisamos fazer a seguinte mudança de variável:

$$u = \sin\theta \qquad \Rightarrow \qquad du = \cos\theta \; d\theta$$

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\,d\theta = \frac{1}{4}\int \frac{1}{u^2}\,du = \frac{-1}{4u} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Portanto,

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}\,dx = \frac{-1}{4\sin\theta} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Voltando à variável original, temos que:

$$x = 2\tan\theta$$

$$\frac{x}{2} = \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$$

Precisamos elevar ambos os lados ao quadrado:

$$\frac{x^2}{4} = \frac{\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta}$$

E, depois, isolar o $\sin\theta$:

$$x^2(1-\sin^2\theta) = 4\sin^2\theta$$

$$x^2 - x^2\sin^2\theta = 4\sin^2\theta$$

$$x^2 = x^2\sin^2\theta + 4\sin^2\theta$$

Chegamos à conclusão que:

$$x^2 = \sin^2\theta(x^2+4)$$

$$\frac{x^2}{x^2+4} = \sin^2\theta$$

Para encontrar $\sin\theta$, extraímos a raiz de ambos os lados:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+4}} = \sin\theta$$

Por fim, é só voltar à nossa integral,

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}\,dx = \frac{-1}{4\sin\theta} + K, \quad K \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}\,dx = \frac{-1}{4\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}} + K, \quad K \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}\,dx = -\frac{\sqrt{x^2+4}}{4x} + K, \quad K \in \mathbb{R}$$

Resposta esperada: $-\frac{\sqrt{x^2+4}}{4x} + K, K \in \mathbb{R}$ **.**