www.estudar.com.vc

Técnicas de Integração

Exercício 5d Substituição Trigonométrica

Resolução

5. Calcule as seguintes integrais, utilizando substituições trigonométricas:

d. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-9}}\, dx$

Fazendo uma substituição trigonométrica adequada, obtemos:

$$x = 3\sec\theta, \quad dx = 3\sec\theta \cdot \tan\theta \, d\theta$$

Neste caso,

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-9}}\, dx = \int \frac{1}{(3\sec\theta)^2\sqrt{(3\sec\theta)^2-9}} \cdot (3\sec\theta \cdot \tan\theta)\, d\theta$$

$$= \int \frac{1}{9\sec^2\theta\sqrt{9\sec^2\theta - 9}} \cdot (3\sec\theta \cdot \tan\theta)\, d\theta$$

$$= \int \frac{1}{9\sec^2\theta \cdot \cancel{3} \cdot \sqrt{\sec^2\theta - 1}} \cdot (\cancel{3}\sec\theta \cdot \tan\theta)\, d\theta$$

Simplificando e tirando a constante do interior da integral:

$$= \frac{1}{9}\int \frac{1}{\cancel{\sec}^2\theta \cdot \sqrt{\sec^2\theta - 1}} \cdot (\cancel{\sec}\theta \cdot \tan\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{1}{9}\int \frac{1}{\sec\theta \cdot \tan\theta} \cdot (\sec\theta \cdot \tan\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{1}{9} \int \frac{1}{\sec \theta} \, d\theta$$

Mas, $\frac{1}{\sec \theta} = \cos \theta$, portanto:

$$\frac{1}{9} \int \frac{1}{\sec \theta} \, d\theta = \frac{1}{9} \int \cos \theta \, d\theta$$

$$= \frac{1}{9} \sin \theta + K, K \in \mathbb{R}$$

Nossa resposta está em função de θ e não em função de x, então, precisamos passá-la para a variável x.

$$x = 3 \sec \theta = \frac{3}{\cos \theta}$$

Logo,

$$\cos \theta = \frac{3}{x}$$

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \frac{9}{x^2}} = \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x}$$

Por fim,

$$\frac{1}{9} \sin \theta + K, K \in \mathbb{R} = \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{9x} + K, K \in \mathbb{R}$$

Resposta esperada: $\frac{\sqrt{x^2-9}}{9x} + K, K \in \mathbb{R}$