www.estudar.com.vc

Técnicas de Integração

Exercício 5a

Resolução

5. Calcule as seguintes integrais, utilizando substituições trigonométricas:

a. $\int \sqrt{4 - x^2}\, dx$

Fazendo a substituição $x = 2\sin\theta$, temos que $dx = 2\cos\theta\, d\theta$, e, portanto:

$$\int \sqrt{4-x^2}\; dx = \int \sqrt{4-4\sin^2\theta} \cdot 2\cos\theta\, d\theta$$

Assim:

$$\int \sqrt{4-x^2}\; dx = \int 2\sqrt{1-\sin^2\theta}\, 2\cos\theta\, d\theta = 4\int \sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta\, d\theta$$

Utilizando a relação trigonométrica $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$:

$$4\int \sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta\, d\theta = 4\int \sqrt{\cos^2\theta}\cos\theta\, d\theta = 4\int \cos^2\theta\, d\theta$$

Lembrando da relação $\cos^2\theta = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}$:

$$4\int \cos^2\theta\, d\theta = 4\int \frac{1+\cos(2\theta)}{2} d\theta = 2\int 1 + \cos\theta\, d\theta$$

$$\int \sqrt{4-x^2}\; dx = 2\left(\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right) + C, \qquad C \in \mathbb{R}$$

Agora precisamos desfazer nossa substituição, uma vez que nossa resposta deve ser em função de x:

$$x = 2\sin\theta \longrightarrow \theta = \arcsin\frac{x}{2}$$

Além disso:

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\cdot\frac{x}{2}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2}$$

Então nossa integral será dada por:

$$\int \sqrt{4-x^2}\ dx = 2\arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + K, K \in \mathbb{R}$$

Resposta esperada: $\boldsymbol{2\arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + K, K \in \mathbb{R}}$**.**