www.estudar.com.vc

Cálculo
Técnicas de Integração
Substituição Trigonométrica por Seno ou Cosseno

Explicação

A substituição trigonométrica é uma técnica de resolução de integrais muito útil e vai ser usada quando tivermos funções da forma:

$$\sqrt{\boldsymbol{a^2 - x^2}} \text{ ou } \sqrt{\boldsymbol{a^2 + x^2}} \text{ ou } \sqrt{\boldsymbol{x^2 - a^2}}$$

Pra cada um dos casos, teremos uma **substituição específica**. Nessa aula, vamos resolver o caso:

$$\sqrt{a^2 - x^2}$$

Pra isso, vamos resolver a integral:

$$\int \sqrt{9 - x^2}\, dx$$

Podemos começar fazendo que $9 = 3^2$, e já deixamos a integral na forma que precisamos:

$$\int \sqrt{3^2 - x^2}\, dx$$

Agora, precisamos lembrar de uma relação trigonométrica importante! Sabemos que vale:

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1^2$$

Isolando o cosseno, temos:

$$\cos^2\theta = 1^2 - \sin^2\theta$$

Perceba que temos duas relações agora: nossa raiz $\sqrt{3^2 - x^2}$ e a identidade trigonométrica $\cos^2\theta = 1^2 - \sin^2\theta$.

Seria interessante conseguir **transformar** a **subtração** de dentro da raiz em **um termo** só!

Agora que vem a parte **mais importante** da técnica! Vamos fazer a seguinte substituição:

$$x = 3 \cdot \sin\theta$$

De forma geral, teríamos:

$$x = a \cdot \sin\theta$$

Queremos que o seno possa assumir qualquer valor entre seus extremos que são -1 e 1, então, vamos definir: $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

Vamos colocar nosso novo x na raiz:

$$\sqrt{3^2 - x^2} = \sqrt{3^2 - (3 \cdot \sin\theta)^2} = \sqrt{3^2 - 3^2 \cdot \sin^2\theta}$$

Podemos ainda colocar o 3^2 em evidência. Ou seja, ficamos com:

$$\sqrt{3^2(1 - \sin^2\theta)} = \sqrt{3^2\cos^2\theta}$$

Pra voltar pra integral, ainda falta analisarmos o que acontece com o dx.

Como temos que $x = 3 \cdot \sin\theta$, derivando dos dois lados, temos:

$$dx = 3 \cdot \cos\theta \, d\theta$$

Voltando pra nossa integral, que era:

$$\int \sqrt{3^2 - x^2}\, dx$$

Agora temos:

$$\int \sqrt{3^2 \cos^2\theta}\, 3 \cdot \cos\theta \, d\theta$$

Definimos nosso θ entre $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$, e dentro desse intervalo, o $\cos\theta$ é sempre positivo, então, podemos tirar da raiz, dessa forma:

$$\int 3\cos\theta \, 3\cos\theta \, d\theta$$

Organizando essa integral, temos:

$$9\int \cos^2\theta \, d\theta$$

Caímos em uma **integral** que **sabemos resolver**, basta lembrar que:

$$\cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$

Trocando isso na integral, ficamos com:

$$9\int \frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta$$

Resolvendo:

$$\boldsymbol{9\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\sin 2\theta}{4}\right)}$$

Agora, só falta voltarmos à nossa variável original, que era o x.

$$x = 3 \cdot \sin\theta$$

Isolando o θ, ficamos com:

$$\theta = \arcsin\frac{x}{3}$$

Substituindo na resposta, teremos:

$$9\left(\frac{\arcsin\frac{x}{3}}{2}+\frac{\sin\left(2\arcsin\frac{x}{3}\right)}{4}\right)+K$$

Esse foi um exemplo bem grande, mas ele é importante porque sempre que tivermos uma integral do tipo:

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

Podemos utilizar essa técnica!

Além disso, poderíamos ter feito também que $x = a \cdot \cos\theta$, fazendo $-1 \leq \theta \leq 1$ para resolver essa integral.