estudar.com.vc

Cálculo Numérico

Resumo e Exercícios P1

Fórmulas e Resumo Teórico Parte 1

Aritmética de ponto flutuante

- Operar com o número de algarismos significativos exigido.
- Arredondar após cada conta.

Método de escalonamento ou Eliminação de Gauss

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \rightarrow \mathbf{A}'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ P_1 & a'_{22} & a'_{23} \\ P_2 & P_3 & a'_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \end{bmatrix}$$

Regras para operações:

- Permutar linhas buscando o pivô de maior valor absoluto (Condensação Pivotal).
- Os coeficientes zerados são ocupados pelos fatores P_n usados para zerá-los.
- $\det(\mathbf{A}) = (-1)^N \det(\mathbf{A}')$, onde N é o número de permutações feitas.

Refinamento de Solução

Ao resolver o sistema escalonado $\mathbf{A}'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$, obtemos a solução $\mathbf{x}^{(0)}$. Para refinar esta solução, calculamos o resíduo e buscamos uma solução refinada. O resíduo **r** é calculado com dupla precisão**.**

$$\mathbf{r} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(0)}$$

Em seguida, resolve-se o sistema linear em precisão simples.

$$\mathbf{Ac} = \mathbf{r}$$

A solução refinada é dada por

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{c}$$

O refinamento pode ser repetido múltiplas vezes.

Métodos Iterativos: Jacobi

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = \left(b_1 - a_{12}x_2^k - a_{13}x_3^k - \cdots - a_{1n}x_n^k\right)/a_{11} \\ x_2^{k+1} = \left(b_2 - a_{21}x_1^k - a_{23}x_2^k - \cdots - a_{2n}x_n^k\right)/a_{22} \\ \vdots \\ x_n^{k+1} = \left(b_n - a_{n1}x_1^k - a_{n2}x_2^k - \cdots - a_{nn-1}x_{n-1}^k\right)/a_{nn} \end{cases}$$

- Troca de linhas para que a diagonal principal não tenha elementos nulos.

- Chuta-se uma solução $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, e calcula-se $(x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1)$.

Métodos Iterativos: Gauss-Seidel

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = \left(b_1 - a_{12}x_2^k - a_{13}x_3^k - \cdots - a_{1n}x_n^k\right)/a_{11} \\ x_2^{k+1} = \left(b_2 - a_{21}x_1^{k+1} - a_{23}x_2^k - \cdots - a_{2n}x_n^k\right)/a_{22} \\ \vdots \\ x_n^{k+1} = \left(b_n - a_{n1}x_1^{k+1} - a_{n2}x_2^{k+1} - \cdots - a_{nn-1}x_{n-1}^{k+1}\right)/a_{nn} \end{cases}$$

- Troca de linhas para que a diagonal principal não tenha elementos nulos.
- Utiliza os valores atualizados para cálculos da mesma iteração.
- Chuta-se uma solução $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, e calcula-se $(x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1)$

Convergência: Critério das linhas

Para cada linha da matriz **A**, se a soma do módulo dos coeficientes fora da diagonal principal for menor que o elemento da diagonal principal, o método irá convergir.

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}|, i = 1, \ldots, n$$

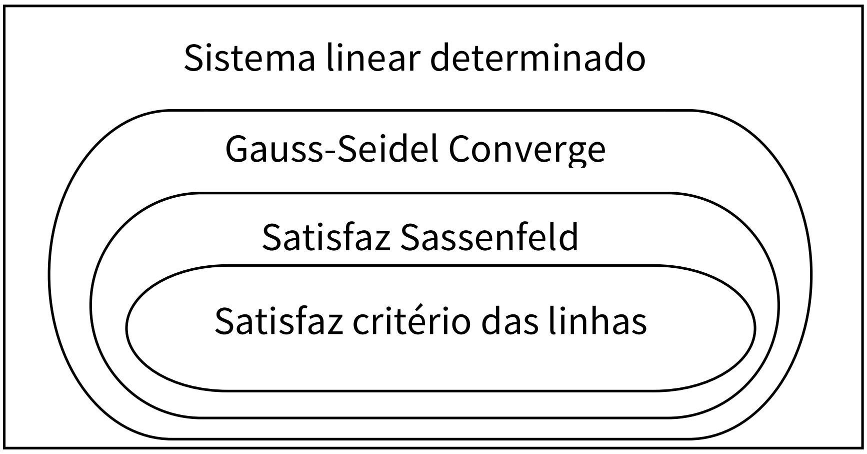
Convergência: Critério de Sassenfeld

$$\beta_1 = \left|\frac{1}{a_{11}}\right| \sum_{j=2}^{n} |a_{1j}|$$

$$\beta_i = \left|\frac{1}{a_{ii}}\right| \left[\sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}|\beta_j + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}|\right], i = 2, \ldots, n$$

Se $\max(\beta_i) < 1$, o método converge! Itera-se até que o

$$\frac{\max(\beta_i)}{1 - \max(\beta_i)} \left|\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}} - \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k-1}}\right| < \text{Erro desejado}$$



Exercícios Parte 1

1. Método de eliminação de Gauss

(Questão 1 – P1 de 2008)

Resolva o sistema linear a seguir pelo método de Eliminação de Gauss com condensação pivotal e aritmética de ponto flutuante com 3 algarismos significativos:

$$\begin{bmatrix} 1.0 & 2.0 & 3.0 \\ 3.0 & -1.0 & 1.0 \\ -1.0 & 3.0 & 2.0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 0.0 \\ 1.5 \end{bmatrix}$$

2. Refinamento de Solução

(Questão 2 – P1 de 2008)

Empregando o método de Eliminação de Gauss com condesação pivotal e 2 algarismos significativos no sistema linear da questão anterior chegamos a matriz escalonada (com os multiplicadores):

$$\begin{bmatrix} 3.0 & -1.0 & 1.0 \\ -0.33 & 2.7 & 2.3 \\ 0.33 & 0.85 & 0.7 \end{bmatrix}$$

Tendo-se efetuado as permutações $p_1 = 2$ e $p_2 = 3$. Faça uma etapa de refinamento da solução obtida $x = (0.47, 0.93, -0.43)$ (Não esqueça do resíduo em dupla precisão).

3. Critérios de Convergência

(Questão 1 – P2 de 1996)

Deseja-se resolver o sistema linear pelo método de Gauss-Seidel

$$\begin{cases} 3.0x_1 - x_2 & = 5 \\ 1.5x_1 + 4.0x_2 & = -1 \\ 3.4x_3 - 1.8x_4 & = 2 \\ x_3 + 2.0x_4 & = 7 \\ 5.0x_1 + 1.2_{x2} - 2.0x_3 + x_4 - x_5 & = 4 \end{cases}$$

a) Verique se o sistema linear acima satisfaz o critério das Linhas. Justifique.

b) O sistema linear acima satisfaz o critério de Sassenfeld? Justifique.

c) Mostre, sem efetuar as iterações, que o método de Gauss-Seidel aplicado ao sistema linear acima converge.

d) Efetue uma iteração do Método de Gauss-Seidel usando aritmética de três algarismos significativos e aproximação inicial da solução $\mathbf{x}^{(0)}$ **=** (0,0,0,0,0).

e) Sem conhecer a solução exata do sistema e sabendo apenas que esta pertence ao conjunto [0,2] x [-1,0] x [0,2] x [0,3] x [0,1], delimite o erro cometido na segunda iteração em cada uma das variáveis x_1, x_2, x_3, x_4, respectivamente $\Delta x_1^{(2)}, \Delta x_2^{(2)}, \Delta x_3^{(2)}, \Delta x_4^{(2)}$.

4. Decomposição LU

(Questão 2 – P1 de 2016)

Considere o sistema linear:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 8 \\ -1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1/2 \\ 3/2 \end{bmatrix}$$

a) Determine a decomposição LU da matriz do sistema ou da matriz obtida desta através de uma permutação de linhas. Utilize a decomposição para resolver o sistema. (Obs: trabalhe com frações.)

b) Reescreva o sistema, ordenando as incógnitas e equações de forma que o método de Gauss-Seidel seja convergente quando aplicado ao sistema resultante. Calcule uma iteração do método a partir de $\mathbf{x}^{(0)}$ **=** (0,-1/2,1). Delimite o erro após esta iteração e estime o número de iterações necessárias para garantir um erro menor de 0.001, sem utilizar o conhecimento da solução.

5. Inversão de matrizes

(Questão 3 – P1 de 1998)

Utilizando o método de eliminação de Gauss, calcule o determinante e a seguir a inversa da matriz abaixo. Efetue todos os cálculos utilizando frações.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Gabarito Parte 1

1. $\mathbf{x}^{(0)}$=(0.490,0.985,-0.484).

2. $\mathbf{x}^{(1)}$=(0.49,0.99,-0.49).

3.

a) Critério das linhas não satisfeito.

b) Critério de Sassenfeld não satisfeito.

d) $\mathbf{x}^{(1)}$=(1.67, -0.878, 0.588, 3.21, 5.33).

e) $\Delta x_1^{(2)} \leq 0.03125$

$\Delta x_2^{(2)} \leq 0.015625$

$\Delta x_3^{(2)} \leq 0.140138$

$\Delta x_4^{(2)} \leq 0.210207$

4. a) $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 8 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1/2 & -1 \end{bmatrix}$, **$(\mathbf{z},\mathbf{y},\mathbf{x})^{(1)}$ =** (7/16, 17/32, 13/64).

5. $Det(\boldsymbol{A}) \ = \ -1.$

$$inv(\boldsymbol{A}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & -1 & -19 \end{bmatrix}$$

Fórmulas e Resumo Teórico Parte 2

Método dos Mínimos Quadrados – Caso Discreto

Deseja-se aproximar uma tabela de N pontos (x, f(x)) por um somatório de funções $g_k(x)$ conhecidas, utilizando como métrica o erro quadrático.

$$f(x) \approx \sum_{k=1}^{K} a_k g_k(x)$$

Logo, se faz necessário determinar os valores dos coeficientes a_k que minimizam o erro quadrático. Isto é feito encontrando a projeção ortogonal de f(x) no subespaço formado pelas funções utilizadas para aproximar f(x). Ou seja, com os produtos internos monta-se o sistema normal, conforme exemplo abaixo, e para obter os coeficientes a_k basta resolver o sistema linear. O sistema tem única solução se $N + 1 \geq K$.

$$\begin{bmatrix} < g_1, g_1 > & \cdots & < g_1, g_K > \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ < g_K, g_1 > & \cdots & < g_K, g_K > \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} < f, g_1 > \\ \vdots \\ < f, g_K > \end{bmatrix}$$

O produto interno utilizado pode ser modificado para que seja adicionado um peso P(x) aos pontos da tabela.

$$< u, v >_P = u_1 \cdot v_1 \cdot P_1 + u_2 \cdot v_2 \cdot P_2 + \cdots$$

Método dos Mínimos Quadrados – Caso Contínuo

Deseja-se aproximar uma função $f(x)$ por um somatório de funções $g_k(x)$. O produto interno utilizado torna-se uma integral cujo intervalo é definido pelo intervalo de aproximação.

$$< f, g_k > = \int_a^b f(x) g_k(x) dx$$

Polinômios ortogonais

Para facilitar as contas é possível utilizar funções que são ortogonais em relação ao produto interno utilizado, de forma que o sistema linear a ser resolvido tenha uma matriz diagonal.

Desta forma, deseja-se construir uma base ortogonal com respeito ao produto interno utilizado, para funções que são polinomiais. De forma geral, inicia-se com o polinômio de grau 0, $p_0(x) = 1,$ e utiliza-se os produtos internos para calcular os polinômios seguintes.

$$p_k = (x - \alpha_k)p_{k-1}(x) - \beta_k p_{k-2}(x)$$

Onde,

$$\alpha_k = \frac{< xp_{k-1}, p_{k-1} >}{< p_{k-1}, p_{k-1} >} \; e \; \beta_k = \frac{< xp_{k-1}, p_{k-2} >}{< p_{k-2}, p_{k-2} >}$$

Polinômios de Mônicos

Os polinômios mônicos são aqueles cujo coeficiente do termo de maior grau é igual a 1.

Polinômios de Legendre

Os polinômios de Legendre são polinômios ortogonais em [-1,1], tais que $< p_i, p_i >= \frac{2}{2i+1}$. Temos que $p_0 = 1, p_1 = x, p_2 = x^2 - \frac{1}{3}$ e $p_3 = x^3 - \frac{3x}{5}$.

Exercícios Parte 2

1. Revisão de Sistemas Lineares/ Sistemas sobredeterminados

(Questão 1 – P2 de 2011)

Considere o sistema linear sobredeterminado

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a) Qual sistema linear se obtém ao resolvê-lo pelo MMQ (correspondente ao cálculo da projeção ortogonal do lado direito do sistema no espaço gerado pelos 3 vetores formados pelas colunas da matriz).

b) O sistema resultante pode ser resolvido por Gauss-Seidel?

c) Resolva-o por eliminação de Gauss com 2 significativos e condensação pivotal.

2. Método dos Mínimos Quadrados - Discreto

(Questão 1 – P2 de 1999)

Um objeto foi lançado verticalmente do alto de um prédio. Sua altura foi registrada a cada segundo após o lançamento e os dados obtidos encontram-se na tabela abaixo.

Altura(m)	192	180	150	115	72
Tempo(s)	1	2	3	4	5

Utilize o método dos mínimos quadrados para estimar a altura do prédio h, a velocidade inicial de lançamento v_0, e o valor da aceleração da gravidade g.

3. Método dos Mínimos Quadrados – Discreto – Exponenciais.

(Questão 3 – P2 de 2006)

Conhece-se os seguintes valores de uma função: $f(0) = 2.1, f(1) = 4.0, f(2) = 8.4, f(3) = 16.0, f(4) = 32.0$. Aproxime $f(x)$ por uma função do tipo $g(x) = 2^{a+bx}$ segundo o método dos mínimos quadrados (discreto). Obs: Use $\log_2(1.05) = 0.07$. Faça as contas sem arredondar os resultados (são necessários só 4 significativos).

4. Método dos Mínimos Quadrados – Continuo

(Questão 4 – P2 de 2011)

Aproxime $g(x) = 1 + x^2$ por uma função do tipo $\frac{a}{1+bx}$ no intervalo [0,1] por um método de MMQ linearizado (com produto interno $< f, g > = \int_0^1 f(x)g(x)dx$).

5. Mudança de Intervalo/ Polinômios ortogonais

(Questão 3 – P2 de 2008)

Seja $f(x)$ definida no intervalo [1,4] tal que $f(x) = e^{\frac{2x-5}{3}}$, para $x \in \left[\frac{5}{2}, 4\right]$, e $f(x) = f(5 - x)$ para $x \in \left[1, \frac{5}{2}\right]$. Determine o polinômio de grau menor ou igual a 2 que melhor aproxima $f(x)$ em [1,4], segundo a norma dada pelo produto interno $< f, g >= \int_1^4 f(x)g(x)dx$. São dados os 3 primeiros polinômios ortogonais em relação ao produto interno$< f, g >= \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx : p_0 = 1, p_1 = x, p_2 = x^2 - \frac{1}{3}$, e que $< p_0, p_0 >= 2$, $< p_1, p_1 >= 2/3, < p_2, p_2 >= 8/45$.

Gabarito Parte 2

1. a) $\begin{bmatrix} 15 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

b) Os critérios de linhas e Sassenfeld não garantem a convergência por Gauss-Seidel.

c) **x** = (0.067, 0.97, 1.3)

2. h_0 = 199.8m

v_0 = -1.79m/s

g = -9.78m/s^2

3. $g(x) = 2^{1.056+0.986x}$

4. $g(x) = \frac{0.9416}{1-0.5217x}$

5. $p(x) = (e-1) + \left(\frac{30e - 75}{4}\right).\left(\left(\frac{2x-5}{3}\right)^2 - \frac{1}{3}\right)$