www.estudar.com.vc

# Integrais

## Exercício 7c Integral Indefinida

Resolução

**7. Calcule:**

**c.** $\int \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} dx$

A princípio, a função $\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}$ parece não conter nenhuma função trigonométrica explícita.

No entanto, como o 3 está multiplicando a função $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, podemos deixar tal número multiplicando a integral, ficando:

$$\int \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} dx = 3 \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

O novo termo dentro da integral possui uma primitiva conhecida: $\arcsin x$, pois:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Desta forma, a integral indefinida calculada será igual à primitiva, multiplicada pela constante 3, somada com uma constante $K$, real:

$$3 \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = 3 \arcsin x + K, K \in \mathbb{R}$$

**Resposta esperada:** $\mathbf{3 \arcsin x + K, K \in \mathbb{R}}$

**Observação:** Se necessário, podemos relembrar o porquê de a derivada do $\arcsin x$ valer a expressão encontrada na integral.

Sendo uma função $y = \sin x$, podemos achar a função $\arcsin x$ invertendo-a, lembrando que:

$$\text{Se } f(x) = \sin x, f^{-1}(x) = \arcsin x$$

Assim, podemos trocar $x$ por $y$, ficando:

$$x = \sin y$$

$$y = \arcsin x$$

Para achar a derivada $f^{-1}(x) = y'$, podemos derivar dos dois lados, usando a derivada implícita:

$$\frac{d}{dx}(x) = \frac{d}{dx}(\sin y)$$

$$1 = \cos y \cdot y'$$

$$y' = \frac{1}{\cos y}$$

No entanto, sabemos que:

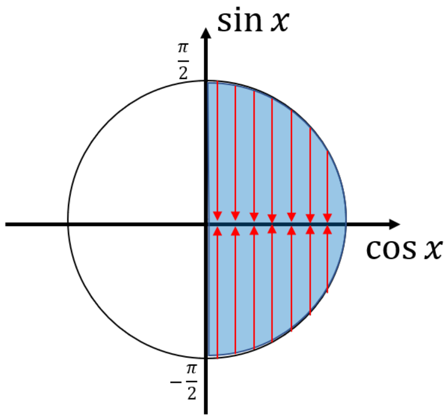
$$\sin^2 y + \cos^2 y = 1$$

Portanto:

$$\cos y = \pm\sqrt{1 - \sin^2 y}$$

Observe, porém, como foi dito acima, que $y = \arcsin x$. Por definição, o conjunto imagem da função $\arcsin$ é $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Como mostra a figura abaixo, para qualquer $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos y \geq 0$.




Logo, somente a resposta positiva interessa:

$$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}$$

E, como $\sin y = x$:

$$\cos y = \sqrt{1 - x^2}$$

Portanto:

$$y' = (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$