www.estudar.com.vc

Integrais

Exercício 7b

Resolução

7. Calcule:

b. $\boldsymbol{\int \sec x\,(\sec x + \tan x)\,dx}$

Fazendo a distributiva na função, temos que:

$$\int \sec x\,(\sec x + \tan x)\,dx = \int \sec^2 x + \sec x \tan x\,dx$$

$$= \int \sec^2 dx + \int \sec x \tan x\,dx$$

As duas integrais acima possuem primitivas relativamente conhecidas: $\tan x$ e $\sec x$, respectivamente. Temos, então:

$$\int \sec x\,(\sec x + \tan x) = \tan x + \sec x + K, \quad K \in \mathbb{R}$$

Mesmo já tendo obtido a resposta, podemos explorar um pouco mais essas integrais.

Resposta esperada: $\boldsymbol{\tan x + \sec x + K,\ K \in \mathbb{R}}$

Observação: caso você queira relembrar como é derivada destas funções trigonométricas, vide explicação abaixo.

No caso da segunda integral, $\int \sec x \tan x\,dx$, é possível calculá-la de forma relativamente simples, usando apenas as primitivas de $\sin x$ e de $\cos x$, aliadas a técnicas de substituição trigonométrica para resolução de integrais.

Para a primeira integral, $\int \sec^2 x\, dx$, também se pode aplicar técnicas de substituição trigonométrica, mas não é tão simples para esta introdução ao estudo de integrais.

Podemos verificar que $\boldsymbol{\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x}$**,** o que também é um procedimento válido para o cálculo de primitivas. Então, escrevendo $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, temos que:

$$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \frac{\sin' x \,.\cos x - \sin x \,.\cos' x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos x \,.\cos x - \sin x \,.(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

Concluímos então que $\tan x$ é uma primitiva de $\sec^2 x$:

$$\int \sec^2 x\, dx = \tan x + K_1, \quad K_1 \in \mathbb{R}$$

Agora, para o cálculo da segunda primitiva, $\int \sec x \tan x\, dx$, podemos utilizar uma técnica de substituição bastante simples.

Temos:

$$\int \sec x \tan x\, dx = \int \frac{1}{\cos x}\frac{\sin x}{\cos x} dx$$

No denominador temos $\cos x$, e no numerador temos $\sin x$, que é sua derivada (a menos do sinal). Isso nos motiva a fazer a seguinte substituição de variáveis:

$$u = \cos x$$

$$du = -\sin x \; dx$$

Substituindo na integral:

$$\int \frac{1}{\cos x}\frac{\sin x}{\cos x}\, dx = \int -\frac{du}{u^2} = -\int \frac{du}{u^2}$$

Ou seja, com essa transformação de variáveis, obtivemos a integral de $1/u^2$, que é bastante simples:

$$-\int \frac{du}{u^2} = -\left(-\frac{1}{u}\right) + K_2 = \frac{1}{u} + K_2, \qquad K_2 \in \mathbb{R}$$

Agora, basta voltar para a variável x:

$$\int \frac{1}{\cos x}\frac{\sin x}{\cos x}\, dx = \frac{1}{u} + K_2 = \frac{1}{\cos x} + K_2 = \sec x + K_2, K_2 \in \mathbb{R}$$

Concluindo, somamos as duas integrais e juntamos as duas constantes em uma só:

$$\int \sec x\,(\sec x + \tan \mathrm{x})\,\mathrm{dx} = \int sec^2 dx + \int \sec x \tan x \, dx$$

$$= \tan x + K_1 + \sec x + K_2 = \tan x + \sec x + K,\;\; K \in \mathbb{R}$$