Lista de Exercícios
Teorema do Confronto
Resolução das Questões 1 e 2

Por Rafael Calegari

ENUNCIADO DA QUESTÃO 1

Calcule $\lim_{x\to+\infty} \frac{2-cos\,(x)}{x+4}$.

SOLUÇÃO

Vamos "montar"a expressão $\frac{2-cos\,(x)}{x+4}$.

Sabe-se que $-1 \le cos\,(x) \le 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Multiplicando ambos os lados por -1, temos:

$$1 \ge -cos\,(x) \ge -1 \ \Rightarrow\ -1 \le -cos\,(x) \le 1$$

Somando 2 a todos os termos da dupla inequação:

$$1 \le 2 - cos\,(x) \le 3$$

Agora basta dividir todos os termos por $x+4$.

• Assumindo $x+4>0$, não precisamos alterar o sinal da desigualdade:

$$\frac{1}{x+4} \le \frac{2-cos\,(x)}{x+4} \le \frac{3}{x+4}$$

• Assumindo $x+4<0$, o sinal da desigualdade se altera:

$$\frac{1}{x+4} \ge \frac{2-cos\,(x)}{x+4} \ge \frac{3}{x+4}$$

Note que, independentemente dos sinais da desigualdade, a função $\frac{2-cos\,(x)}{x+4}$ está sempre entre $\frac{1}{x+4}$ e $\frac{3}{x+4}$.

Vamos, agora, calcular $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x+4}$ e $\lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x+4}$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x+4} = \frac{1}{+\infty} = 0 \ \text{ e } \ \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x+4} = \frac{3}{+\infty} = 0$$

Assim, pelo **Teorema do Confronto**, podemos afirmar que:

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{2-cos\,(x)}{x+4} = 0}$$

ENUNCIADO DA QUESTÃO 2

Calcule $\lim_{x\to+\infty} \frac{cos^2(2x)}{3-x}$.

SOLUÇÃO

Analogamente ao que fizemos na questão anterior, vamos construir a expressão $\frac{cos^2(2x)}{3-x}$.

Sabe-se que $0 \le cos^2(x) \le 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Isso implica que $0 \le cos^2(2x) \le 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Para chegarmos à expressão desejada, devemos dividir todos os termos da dupla inequação por $3-x$.

• Assumindo $3-x>0$, não precisamos alterar o sinal da desigualdade:

$$0 \le \frac{cos^2(2x)}{3-x} \le \frac{1}{3-x}$$

• Assumindo $3-x<0$, o sinal da desigualdade se altera:

$$0 \ge \frac{cos^2(2x)}{3-x} \ge \frac{1}{3-x}$$

Note que, independentemente dos sinais da desigualdade, a função $\frac{cos^2(2x)}{3-x}$ está sempre entre 0 e $\frac{1}{3-x}$.

Vamos calcular $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{3-x}$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{3-x} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

Nesse caso, não precisamos calcular $\lim_{x\to+\infty} 0$, pois sabemos que esse limite é igual a zero (o limite de uma constante para x tendendo a qualquer valor é igual à própria constante).

Desse modo, pelo **Teorema do Confronto**, podemos afirmar que:

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{cos^2(2x)}{3-x} = 0}$$