www.estudar.com.vc

Probabilidade

Fuja do Nabo P3 2018.1

Resumo e Lista de Exercícios

Resumo

1. Distribuições Unidimensionais

a. Uniforme

$$f(x) = \begin{cases} 0, x < a \\ 0, x > b \\ \dfrac{1}{b-a}, a \leq x \leq b \end{cases}$$

b. Exponencial

$$f(x) = \rho e^{-\rho x} \quad \mu_x = \frac{1}{\rho} \qquad \sigma = \frac{1}{\rho}$$

c. Normal

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$ Notação X ~ N (μ, σ)

2. Combinação Linear de Distribuições Normais

O que preciso saber se:

$$X = N(\mu_x, \sigma_x)$$

$$Y = N(\mu_y, \sigma_y)$$

$$W = aX + bY$$

$$W = N(\mu_W, \sigma_W)$$

$$\mu_W = a\mu_X + b\mu_Y$$

$$\sigma_W^2 = a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2$$

3. Distribuições Multidimensionais

Para situações em que mais de um resultado é observado em um experimento, daqui para frente, trabalharemos com apenas duas variáveis:

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots)$$

a. Probabilidades Marginais

Se tivermos a distribuição multidimensional é possível retirar a distribuição unidimensional:

$$P(X_1 = x) = \sum_{x_2} P(X_1 = x, X_2 = x_2)$$

$$f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{xy}(y) \cdot dy$$

b. Independência

Podemos dizer que duas variáveis são independentes se:

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y)$$

$$f_{xy}(x, y) = f_x(x) \cdot f_y(y)$$

c. Distribuições Condicionais

Apenas outra forma de descrever mais de uma variável:

$$P(X = x|Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}$$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

Observação: Se as variáveis são independentes: $P(X = x|Y = y) = P(X = x)$.

4. Esperança Condicional

$$E[X|Y = y] = \sum_x x \cdot P(X = x|Y = y)$$

Note que está em função de y.

5. Média de uma Função sobre X e Y

Considere $h(X, Y)\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e queremos saber o valor de $E[h(X, Y)]$:

$$E[h(X,Y)] = \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} h(x,y) \cdot P(X = x, Y = y)$$

6. Covariância e Correlação de X e Y

$$Cov[X,Y] = E[XY] - E[X]E[Y]$$

$$Cov[aX, bY] = ab\ Cov[X,Y]\ (a > 0, b > 0)$$

$$\rho[X,Y] = \frac{Cov[X,Y]}{\sigma_X \sigma_Y}$$

$$\rho[aX,bY] = \rho[X,Y] \ \ (a > 0, b > 0)$$

$$\rho[-X,Y] = \ \rho[X,-Y] = \ -\rho[X,Y]$$

$$-1 \leq \rho \leq 1$$

$$\rho[X,X] = 1$$

Exercícios

1. Variável Normal e Combinação Linear

Um criador de frangos compra pintinhos a $R\$0{,}10$ cada um e ração a $R\$200{,}00$ por tonelada. Vende os frangos criados, prontos para o abate, por $R\$1{,}00/kg$ para o frigorífico. Cada frango come, durante sua fase de crescimento, uma quantidade de ração segundo uma distribuição normal de esperança $10\ kg$ e desvio padrão $2\ kg$, independentemente de seu peso final. O custo fixo de criação dos frangos é de $R\$0{,}10$ por frango (água, energia elétrica, mão de obra, manutenção, etc...). Os frangos ficam prontos para o corte com um peso médio de 2,5 kg e variância de $0{,}09\ kg^2$. Qual a probabilidade de um frango escolhido ao acaso dar lucro ao produtor na hora da venda?

2. Distribuição Exponencial e Uniforme

O número de quilômetros que um carro pode rodar sem que a bateria descarregue possui distribuição exponencial com valor esperado $10.000\ km$. Suponha que uma viagem de $5.000\ km$ será feita.

a. Qual a probabilidade de que seja necessário trocar esta bateria durante a viagem, dado que a bateria foi usada por 1.000 quilômetros antes do início da viagem?

b. Qual seria essa probabilidade se a distribuição de probabilidade fosse uniforme no intervalo $[3000; 7000]$?

3. Distribuição Bidimensional

As variáveis aleatórias X e Y têm densidade conjunta:

a. Calcule a probabilidade de $X < Y^2$.
b. Calcule a densidade marginal de X.
c. X e Y são independentes? Justifique.
d. Suponha que você saiba agora que ocorreu o evento $A = \{X = 0{,}5\}$. Qual é a probabilidade de $B \ = \{Y \geq 0{,}5\}$ dado A?

4. Distribuição Bidimensional e Covariância

A função densidade conjunta de variáveis aleatórias X e Y é:

$$\begin{cases} f(x,y) = 2e^{-x}e^{-2y} & x \geq 0 \ y \geq 0 \\ f(x,y) = 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

a. Calcule $P(X > 1, Y < 1)$.
b. Calcule $P(X < Y)$.
c. Calcule $Cov(X, Y)$.

Gabarito

1. $0{,}7257$

2.

a. $1 - e^{\frac{-1}{2}}$

b. $\frac{3}{4}$

3.

a. $\frac{7}{20}$

b. $(x + \frac{1}{2})$ para $0 \leq x \leq 1$

c. Não.

d. $\frac{5}{8}$

4.

a. $\frac{1}{e} - \frac{1}{e^3}$

b. $\frac{1}{3}$

c. 0