www.estudar.com.vc

Probabilidade

Fuja do Nabo P2 2018.1

Resumo e Lista de Exercícios

Fórmulas e Resumo Teórico

1. Valor Médio ou Esperança

É o valor esperado para a variável aleatória ou função.

Caso Discreto

$$E[g(X)] = \sum_{i=1}^{N} g(x_i) \cdot P[X = x_i]$$

$$E[X] = \sum_{i=1}^{N} x_i \cdot P[X = x_i]$$

Caso Contínuo

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f(x) dx$$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$$

O valor esperado pode ser interpretado como uma medida da localização do centro da variável aleatória.

A função de esperança é linear, logo:

$$E(aX + b) = a \cdot E(X) + b$$

$$E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2)$$

2. Variância

A variância é uma medida da variabilidade da distribuição de uma variável aleatória.

$$\sigma^2(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

3. Desvio Padrão

Mede dispersão entre a variável aleatória e a média.

$$\sigma(X) = \sqrt{\sigma^2(X)}$$

4. Momento da Função

O momento de ordem N de uma função é definido pela seguinte equação:

Caso Discreto

$$E[X^k] = \sum_{i=1}^{N} {x_i}^k \cdot P[X = x_i]$$

Caso Contínuo

$$E[X^k] = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \cdot f(x)dx$$

Obs: A esperança de uma função é o momento de primeira ordem dela e a variância é a diferença entre o momento de segunda ordem e o quadrado do momento de primeira.

5. Distribuições Unidimensionais Discretas

a. Binomial

N experimentos que resultam em sucesso (S) ou falha (F), sendo $P(S) = p$.

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$E(X) = np$$

$$\sigma^2(X) = np(1-p)$$

b. Geométrica

Sequência ilimitada de ensaios de Bernoulli. N ensaios são realizados até que ocorra o primeiro sucesso.

$$P(X = x) = (1-p)^{x-1} p$$

$$E(X) = \frac{1-p}{p}$$

$$\sigma^2(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

c. Poisson

Possui um parâmetro λ.

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$

$$E(X) = \sigma^2(X) = \lambda$$

Obs: Nos casos em que n = número grande e p = número pequeno, podemos utilizar uma distribuição de Poisson em que $\lambda = np$.

6. Distribuições Multidimensionais

Para situações em que mais de um resultado é observado em um experimento.

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots)$$

Daqui para frente, trabalharemos com apenas duas variáveis.

Probabilidades Marginais

Se tivermos a distribuição multidimensional, é possível retirar a distribuição unidimensional.

$$P(X_1 = x) = \sum_{x_2} P(X_1 = x, X_2 = x_2)$$

$$f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{xy}(y) \cdot dy$$

Independência

Podemos dizer que duas variáveis são independentes se:

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y)$$

ou

$$f_{xy}(x, y) = f_x(x) \cdot f_y(y)$$

Distribuições Condicionais

Apenas outra forma de descrever mais de uma variável:

$$P(X = x|Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}$$

Obs: Se as variáveis são independentes, então: $P(X = x|Y = y) = P(X = x)$.

Esperança Condicional

$$E[X|Y = y] = \sum_{x} x \cdot P(X = x|Y = y)$$

Média de uma Função sobre X e Y

$$E[h(X, Y)] = \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} h(x, y) \cdot P(X = x, Y = y)$$

Covariância e Correlação de X e Y

$$Cov[X, Y] = E[XY] - E[X]E[Y]$$

$$Cov[aX, bY] = abCov[X, Y]\ (a > 0, b > 0)$$

$$\rho[X, Y] = \frac{Cov[X, Y]}{\sigma_X \sigma_Y}, -1 \leq \rho \leq 1$$

$$\rho[aX, bY] = \rho[X, Y]\ \ (a > 0, b > 0)$$

$$\rho[-X, Y] = \rho[X, -Y] = -\rho[X, Y]$$

$$\rho[X, X] = 1$$

Exercícios

1. Valor Esperado e Variância

Lista 2B Adaptada – Probabilidade 2017 – POLI-USP

A variável aleatória Y tem função de densidade de probabilidade *(pdf)*:

$$f_Y(Y) = \begin{cases} \frac{y}{2}, \text{ se } 0 \leq y \leq 2 \\ \\ 0\text{, caso contrário} \end{cases}$$

Use a *pdf* de Y para calcular:

a. O valor esperado de Y.
b. A variância de Y.

2. Propriedades do Valor Esperado e Variância

Prova 2 – Probabilidade 2017 – POLI-USP

Seja uma variável aleatória X. Considere:

a. Se $X = 1$, então $E(X) = 1$
b. $E(X + 2X) = 3E(X)$
c. $V(X + 2X) = 5V(X)$
d. $E(X^4) = V(X^2) + (V(X) + E(X^2))^2$

São corretas apenas as afirmações:

A. (b), (c), (d)
B. (a), (c), (d)
C. (a), (b)
D. (a), (b), (c), (d)
E. (a), (b), (d)

3. Distribuição Binomial

Lista 2B – Probabilidade 2017 – POLI-USP

Quando um celular transmite um SMS, a probabilidade de que a mensagem seja recebida pelo outro celular é igual a p. Para garantir que o SMS seja recebido pelo menos uma vez, o sistema transmite a mensagem n vezes.

a. Assumindo que todas as transmissões são independentes, qual é a função de massa de probabilidade de K, o número de vezes que o celular recebe o SMS?
b. Assuma que $p = 0{,}8$. Qual é o valor mínimo de n que produz uma probabilidade de $0{,}95$ de receber o SMS pelo menos uma vez?

4. Distribuição Geométrica

Prova 2 – Probabilidade 2017 – POLI-USP

Considere duas variáveis aleatórias X e Y com distribuições geométricas, com mesmo parâmetro p, e tais que $P(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) = P(X = x)P(Y = y)$ para quaisquer x e y. Qual é o valor de $P(X + Y = n)$?

5. Distribuição de Poisson

Lista 1 – Probabilidade 2017 e Prova 2 – Probabilidade 2016 – POLI-USP

Considere uma variável aleatória distribuição de Poisson com parâmetro $4t$, em que t é um período de tempo fornecido, dado em horas. Esse tipo de variável é usada para representar solicitações de assistência em uma empresa de seguros: X é o número de pedidos de assistência em um intervalo de tempo t. Se os operadores da empresa tirarem meia hora de folga para almoço, qual a probabilidade de não perderem nenhum chamado de assistência?

A. e^2
B. $\frac{1}{8}$
C. $\frac{1}{e}$
D. $\frac{1}{e^2}$
E. $\frac{1}{\sqrt{e}}$

6. Distribuição Conjunta

Lista 3B – Probabilidade 2017 – POLI-USP

As variáveis aleatórias X e Y possuem função massa de probabilidade conjunta dada por:

$$p_{XY}(x,y) = \begin{cases} cxy \text{ , se } x = 1,2,4 \text{ e } y = 1,3 \\ 0 \text{ , caso contrário} \end{cases}$$

a. Qual o valor da constante c?
b. Calcule $P[Y < X]$.

7. Distribuição Marginal

Lista 3C – Probabilidade 2017 – POLI-USP

Uma loja de automóveis de luxo tem a seguinte função de probabilidade do número de vendas por semana:

x	0	1	2	3
$P[X = x]$	0,25	0,25	0,25	0,25

Considere um conjunto de N pessoas em que todas compraram automóveis. Para cada uma dessas pessoas que comprou automóvel, considere ainda o evento "a pessoa comprou blindagem". Suponha que esses N eventos sejam independentes (dado que as N pessoas compraram automóveis). Suponha também que a probabilidade de uma pessoa comprar blindagem, dado que ela pertence ao grupo de pessoas que comprou automóvel, é 0,60. Seja Y o número de compradores em uma semana que solicitaram blindagens. Determine a função de probabilidade marginal de Y.

8. Distribuição Condicional

Lista 3C – Probabilidade 2017 e Prova 3 – Probabilidade 2016 – POLI-USP

O eixo de um motor precisa ter um determinado comprimento e diâmetro; uma vez que o motor esteja montado, é possível medir o diâmetro do eixo, mas não o seu comprimento. Uma empresa produz eixos, cujos diâmetros e comprimentos estão distribuídos como descrito na tabela abaixo.

Diâmetro (⇩) Comprimento (⇨)	$10cm$	$11cm$	$12cm$	$13cm$
$5mm$	$0{,}01$	$0{,}02$	$0{,}05$	$0{,}01$
$6mm$	0	$0{,}05$	$0{,}4$	$0{,}05$
$7mm$	$0{,}02$	$0{,}03$	$0{,}02$	$0{,}04$
$8mm$	$0{,}05$	$0{,}1$	$0{,}1$	$0{,}05$

Dado que para um certo motor montado, notou-se que o eixo tem o diâmetro $D = 6mm$, qual é a probabilidade do comprimento ser $C = 12cm$?

9. Independência

Prova 3 – Probabilidade 2016 – POLI-USP

A tabela abaixo mostra a probabilidade conjunta de duas variáveis aleatórias discretas X e Y.

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	$0{,}125$	a	$0{,}10$	$0{,}125$
x_2	$0{,}05$	$0{,}06$	b	$0{,}05$
x_3	$0{,}075$	$0{,}09$	$0{,}06$	$0{,}075$

Para que as duas variáveis sejam independentes, os valores de a e b devem ser quais?

10. Covariância

Lista 3C – Probabilidade 2017 – POLI-USP

Considere duas variáveis aleatórias X e Y, independentes, sendo: $E(X) = 1$; $E(Y) = -2$; $E(X^2) = 4$; $E(Y^2) = 6$. Definem-se duas novas variáveis aleatórias U e Z, dadas por: $U = Y - 2X$ e $Z = 2Y + X$. Encontre $Cov(U, Z)$.

11. Coeficiente de Correlação

Prova 3 – Probabilidade 2017 – POLI-USP

Duas variáveis aleatórias quaisquer X e Y são identicamente distribuídas e independentes. Sejam as variáveis aleatórias $Z = X + Y$ e $W = X - Y$. Podemos afirmar que:

A. Z e W têm covariância diferente de zero.
B. Z e W têm correlação nula.
C. Z e W são independentes.
D. Nenhuma das anteriores.
E. $Z + W$ têm distribuição normal.

Gabarito

1.

a. $\frac{4}{3}$

b. $\frac{2}{9}$

2. E

3.

a. $p_K(k) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \text{ se } k = 0,1 \ldots \\ 0 \text{ , caso contrário} \end{cases}$

b. $n = 2$

4. $(n+1)p^2(1-p)^n$

5. D

6.

a. $\frac{1}{28}$

b. $\frac{18}{28}$

7. $P(Y=0) = 0{,}406, P(Y=1) = 0{,}342, P(Y=2) = 0{,}198, P(Y=3) = 0{,}054$

8. $0{,}8$

9. $0{,}15$ e $0{,}04$

10. -2

11. B