estudar.com.vc

Álgebra Linear 1

Resumo e Exercícios P1

Fórmulas e Resuminho Teórico Parte 1

Vetores

$\vec{v}$ possui módulo $\|\vec{v}\|$, sentido e direção

$\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, então $B = A + \vec{v}$

Combinação Linear

$\vec{v} = a\vec{a} + b\vec{b} + \cdots + z\vec{z}, \quad com\ a, b, \dots, z \in \mathbb{R}$

Dependência Linear

Conjunto $S = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n}\}$ é Linearmente Dependente se houver qualquer combinação linear dentro, Linearmente Independente se não houver

- $(\vec{u}, \vec{v})$ é LD ⇔ $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos (múltiplos)
- $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é LD ⇔ $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são coplanares

Dica: Se um dos vetores for o nulo, é LD

Regra prática para saber se vetores são LD

1. Colocar as coordenadas nas linhas de uma matriz
2. Escalonar
3. Se uma linha zerar é LD (caso escalonar perfeito, é LI)

$$\begin{pmatrix} \overrightarrow{v_1} \\ \overrightarrow{v_2} \\ \overrightarrow{v_3} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}) \text{ é LD}$$

Base

$\mathrm{B} = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})$

Conjunto ordenado de 3 vetores LI

Base ortogonal -> Vetores da base ortogonais entre si

Base ortonormal -> Vetores ortogonais e com norma 1

Coordenadas

$\vec{v} = (x, y, z)_B \Leftrightarrow \vec{v} = x\overrightarrow{v_1} + y\overrightarrow{v_2} + z\overrightarrow{v_3}$

$\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)_B$

$\alpha\vec{v} = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)_B$

Produto Escalar

$$\vec{u} * \vec{v} = \begin{cases} 0, se\ \vec{u} = \vec{0}\ ou\ \vec{v} = \vec{0} \\ \qquad \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|cos\theta \end{cases}$$

$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} * \vec{u}}$

Se estiver em uma ***base ortonormal***

$\vec{u} * \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

$\|\vec{u}\| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$

Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais, $\vec{u} * \vec{v} = 0$

Exercícios Parte 1

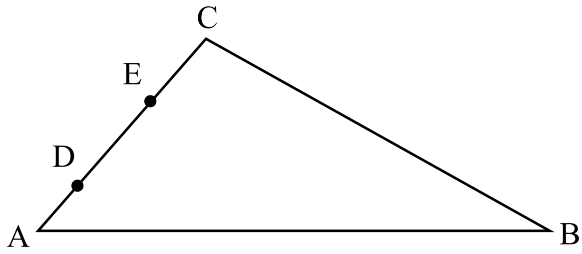
1. Vetores

Prova 0 P1 2016 Álgebra Linear para Engenharia I, exercício 10

Considere no espaço E^3 um triângulo ABC e sejam D e E pontos do segmento AC tais que

$$||\overrightarrow{AD}|| = \frac{1}{5}||\overrightarrow{AC}|| \text{ e } ||\overrightarrow{AE}|| = \frac{3}{4}||\overrightarrow{AC}||.$$

como ilustrado na figura abaixo:



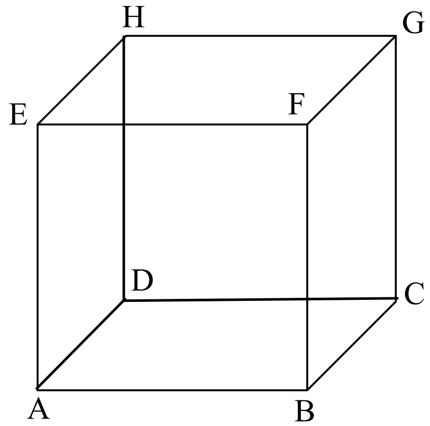
Se $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ são tais que $\overrightarrow{BD} = \alpha\overrightarrow{BA} + \beta\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{BE} = \gamma\overrightarrow{BA} + \delta\overrightarrow{BC}$, então:

A. $\alpha = \frac{1}{5}, \beta = \frac{4}{5}, \gamma = \frac{1}{4}\ e\ \delta = \frac{3}{4}$
B. $\alpha = \frac{2}{5}, \beta = \frac{1}{5}, \gamma = \frac{3}{4}\ e\ \delta = \frac{1}{4}$
C. $\alpha = \frac{1}{5}, \beta = \frac{2}{5}, \gamma = \frac{1}{4}\ e\ \delta = \frac{3}{4}$
D. $\alpha = \frac{4}{5}, \beta = \frac{1}{5}, \gamma = \frac{1}{4}\ e\ \delta = \frac{3}{4}$
E. $\alpha = \frac{2}{5}, \beta = \frac{3}{4}, \gamma = \frac{1}{5}\ e\ \delta = \frac{1}{4}$

2. Dependência Linear

Prova 0 Psub 2016 Álgebra Linear para Engenharia I, exercício 10

Considere no espaço E^3 um cubo cujos vértices são A, B, C, D, E, F, G, H em que ABCD, ADHE e ABFE são faces desse cubo, como ilustrado na figura abaixo:



Seja M o ponto médio do segmento CG e considere a base de V^3dada por:

$$\beta = \{\overrightarrow{BH}, \overrightarrow{CF}, \overrightarrow{DM}\}.$$

A soma das coordenadas do vetor $\overrightarrow{DF}$na base βé igual a:

A. 1

B. $\frac{7}{5}$

C. $\frac{3}{2}$

D. $-\frac{1}{3}$

E. $\frac{7}{2}$

3. Dependência Linear

Prova 0 P1 2016 Álgebra Linear para Engenharia I, exercício 15

Considere as seguintes afirmações

I. Para quaisquer pontos dois a dois distintos A, B, C, D $\in E^3$, vale que o conjunto $$\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\}$$ é linearmente dependente se, e somente se, os pontos A, B, C e D são coplanares;

II. Para quaisquer pontos dois a dois distintos A, B, C, D, E, F $\in E^3$, vale que o conjunto $$\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{EF}\}$$ é linearmente dependente se, e somente se, os pontos A, B, C, D, E e F são coplanares;

III. Para quaisquer vetores $\vec{v}, \vec{w}, \vec{z} \in V^3$, se o conjunto $\{\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}\}$ é linearmente dependente, então algum subconjunto de $\{\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}\}$ com apenas dois vetores é linearmente dependente.

Assinale a alternativa correta:

A. Todas as afirmações são falsas;

B. Apenas as afirmações I. e II. são verdadeiras;

C. Apenas a afirmação I. é verdadeira;

D. Apenas as afirmações II. e III. são verdadeiras;

E. Apenas as afirmações I. e III. são verdadeiras;

4. Produto escalar

Prova 0 P1 2013 Álgebra Linear para Engenharia I, exercício 7

Sejam $\vec{v}, \vec{w} \in V^3$ e seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Assinale a alternativa que contém uma afirmação **FALSA**.

A. Se $\alpha\vec{v} = \vec{0}$, então $\alpha = 0$ ou $\vec{v} = \vec{0}$
B. Se $\vec{u} \neq \vec{0}, \vec{v} \neq \vec{0}$ e $\vec{u} * \vec{v} = 0$ então $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são linearmente independentes
C. Se $\vec{u} + \vec{v}$ é ortogonal a $\vec{u} - \vec{v}$, então $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$
D. $\vec{u} * \vec{v} = 0$ se, e somente se, $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$
E. Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais e têm a mesma norma, então $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \sqrt{2}\|\vec{u}\|$

5. Produto escalar

Prova 0 P1 2016 Álgebra Linear para Engenharia I, exercício 7

Sejam $\vec{v}, \vec{w} \in V^3$ tais que $\|\vec{v}\| = 13, \|\vec{w}\| = 19$ e $\|\vec{v} + \vec{w}\| = 26$. Temos que $\|\vec{v} - \pi\vec{w}\|^2$ é igual a:

A. $361 + 146\pi + 169\pi^2$
B. $169 - 146\pi + 361\pi^2$
C. $361 - 146\pi + 169\pi^2$
D. $169 - 73\pi + 361\pi^2$
E. $169 + 146\pi + 361\pi^2$

6. Produto escalar

Prova 0 P1 2015 Álgebra Linear para Engenharia I, exercício 3

Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ e E uma base ortonormal de V^3. Considere os vetores $\vec{z} = (1,0,1)_E$, $\vec{v} = (-2,1,0)_E$, $\vec{w} = (0,-1,1)_E$ e $\vec{x} = (a, b, c)_E$. Se $\|\vec{x}\| = 3$, $\vec{x}$ é ortogonal a $\vec{z}$ e $\{\vec{v}, \vec{w}, \vec{x}\}$ é linearmente dependente, então $|a + b + c|$ é igual a:

A. 2
B. 3
C. 1
D. 7
E. 5

Gabarito Parte 1

1. D
2. B
3. E
4. D
5. B
6. C

Fórmulas e Resuminho Teórico Parte 2

<u>Projeção Ortogonal</u>

$\mathrm{Proj}_{\vec{v}}^{\vec{u}} = \frac{\vec{u}*\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v}$, tem direção de $\vec{v}$

$\vec{u} = \mathrm{Proj}_{\vec{v}}^{\vec{u}} + \vec{x}$, sendo $\vec{x}$ um vetor ortogonal a $\vec{v}$, formando um triangulo retângulo

<u>Notação Matricial de Sistemas Lineares</u>

$$\begin{cases} ax_1 + by_1 + cz_1 = m \\ dx_2 + ey_2 + fz_2 = n \\ gx_2 + hy_2 + iz_2 = o \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b & c & m \\ d & e & f & n \\ g & h & i & o \end{pmatrix}$$

<u>Escalonamento</u>

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \rightarrow (Multiplicação\ e\ soma\ entre\ linhas) \rightarrow \begin{pmatrix} m & n & o \\ 0 & p & q \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix}$$

<u>Resolução de Sistema</u>

$\begin{pmatrix} a & b & c & m \\ d & e & f & n \\ g & h & i & o \end{pmatrix} \rightarrow$ Escalonar matriz do sistema

Casos

1. $\begin{pmatrix} x & y & z & w \\ 0 & \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & \epsilon & \theta \end{pmatrix} \rightarrow$ Sistema consistente determinado (1 solução)
2. $\begin{pmatrix} x & y & z & w \\ 0 & \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ Sistema consistente indeterminado (Conjuntos de solução)
3. $\begin{pmatrix} x & y & z & w \\ 0 & \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & \theta \end{pmatrix}, \theta \neq 0 \rightarrow$ Sistema inconsistente (Não tem solução)

Multiplicação de Matrizes

$C = AB$, (Linha x Coluna)

A^{-1} inversa de A, tal que $AA^{-1} = I(identidade)$

Método para encontrar a inversa

- *Construir* $(\mathrm{A}|\mathrm{I}) = \begin{pmatrix} a & b & c & 1 & 0 & 0 \\ d & e & f & 0 & 1 & 0 \\ g & h & i & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- *Escalonar o lado esquerdo para formar* $(\mathrm{I}|B)$
- *Então terá* $(I|A^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & m & n & o \\ 0 & 1 & 0 & p & q & r \\ 0 & 0 & 1 & s & t & u \end{pmatrix}$

Determinante

$\det(\mathrm{A}) = \det\,(\mathrm{A}^{\mathrm{t}})$

$\det(AB) = \det(A)\det(B)$

$A \in M_n, \quad \det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$

A invertível $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

Exercícios Parte 2

1. Projeção ortogonal

Prova 0 P1 2016 Álgebra Linear para Engenharia I, exercício 8

Sejam $\vec{v}, \vec{w} \in V^3$ tais que $\|\vec{v}\| = 13$, $\|\vec{w}\| = 12$ e $\|\vec{v} - \vec{w}\| = 5$. Pode-se afirmar que:

A. $\vec{w} = Proj_{\vec{w}}^{\vec{v}}$
B. O conjunto $\{\vec{v}, \vec{w}\}$ é linearmente dependente
C. $\vec{w} = 3Proj_{\vec{w}}^{\vec{v}}$
D. $\vec{v} = Proj_{\vec{v}}^{\vec{w}}$
E. $\vec{v} = 2Proj_{\vec{v}}^{\vec{w}}$

2. Projeção ortogonal

Prova 0 P1 2015 Álgebra Linear para Engenharia I, exercício 12

Seja B uma base ortonormal de V^3 e considere os vetores:

$$\vec{v} = (1,-2,3)_B \text{ e } \vec{w} = (3,1,-2)_B$$

Sejam $\vec{x}, \vec{y} \in V^3$ tais que $\vec{w} = \vec{x} + \vec{y}$, $\vec{x}$ é paralelo a $\vec{v}$ e $\vec{y}$ é ortogonal a $\vec{v}$. Se $\vec{y} = (a,b,c)_B$, então $a+b+c$ é igual a:

F. -2

G. $\frac{5}{7}$

H. 2

I. $\frac{15}{7}$

J. $\frac{19}{7}$

3. Sistemas e Matrizes

Prova 0 P1 2016 Álgebra Linear para Engenharia I, exercício 3

Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e denote por A^t a sua transposta. Temos que $\det(A^3) - \det[3(A^t)^{-1}]$é igual a:

A. -26

B. 55

C. 0

D. 26

E. 81

4. Sistemas e Matrizes

Prova 0 P1 2016 Álgebra Linear para Engenharia I, exercício 13

Se $a, b, c, d, e, f, g, h, i \in \mathbb{R}$, são tais que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

então $abc + def + ghi$ é igual a:

A. 2
B. -4
C. 0
D. -2
E. 4

5. Sistemas e Matrizes

Prova 0 P1 2015 Álgebra Linear para Engenharia I, exercício 5

Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ e considere o sistema linear:

$$\begin{cases} x - y + z = 2b, \\ x + ay - z = c, \\ -x + y + az = 1, \end{cases}$$

Nas incógnitas x, y e z.Assinale a alternativa correta:

F. O sistema possui infinitas soluções se, e somente se, $a = -1$ e $b = -\frac{1}{2}$
G. O sistema possui uma única solução se, e somente se, $a = -1$ e $b \neq -\frac{1}{2}$
H. O sistema possui uma única solução se, e somente se, $a = -1$ e $b = -\frac{1}{2}$
I. O sistema não possui solução se, e somente se, $a \neq -1$ e $c = 2$
J. O sistema não possui solução se, e somente se, $a \neq -1$ e $b = -\frac{1}{2}$

6. Sistemas e Matrizes

Prova 0 P1 2014 Álgebra Linear para Engenharia I, exercício 5

Seja A uma matriz $p \times n$ e seja B uma matriz $p \times 1$. Considere as seguintes afirmações sobre o sistema linear $AX = B$:

I. Se $p > n$ e $B \neq 0$, então o sistema é impossível.
II. Se $p < n$ e $B = 0$, então o sistema é possível indeterminado.
III. Se $p = n$ e $B \neq 0$, então o sistema é possível determinado.

Está correto o que se afirma em

F. I. e II., apenas
G. I. e III., apenas
H. I. , II. e III.
I. II., apenas
J. II. e III., apenas

7. Sistemas e Matrizes

Prova 0 P1 2015 Álgebra Linear para Engenharia I, exercício 11

Temos três ligas metálicas: a primeira liga contém 50% de ouro, 30% de prata e 20% de platina. A segunda liga contém 30% de ouro e 70% de prata. A terceira liga contém 40% de ouro, 50% de prata e 10% de platina. Combinando essas três ligas, criamos uma nova liga que contém 45% de ouro. Que proporção de prata contém a nova liga?

A. 45%
B. 40%
C. 55%
D. 50%
E. 35%

Gabarito

1. A
2. E
3. C
4. B
5. A
6. D
7. B