www.estudar.com.vc

Álgebra Linear I

Fuja do Nabo P3 2018.1

Resumo e Lista de Exercícios

Resumo

1. Espaço Vetorial

Um espaço vetorial é qualquer conjunto V existente, para o qual definimos duas operações. A primeira operação chamamos de ‘soma’, porque associa dois vetores do espaço vetorial e deve obedecer às seguintes propriedades:

a. $(u+v)+w=u+(v+w), u, v, w \in V$
b. $u+v=v+u$
c. $\exists\ 0_V$ tal que, $u+0_V\ =u$*
d. $\forall \in V,\ \exists(-u) \in V$ tal que $u+(-u)=0_V$

A segunda operação, por sua vez, chamamos de ‘produto por escalar’, e ela deve obedecer às seguintes propriedades:

a. $\lambda(\mu v)=(\lambda\mu)v,\ \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
b. $(\lambda+\mu)v=\lambda v+\mu v$
c. $\lambda(u+v)=\lambda u+\lambda v$
d. Se $\lambda v=0$, então $\lambda=0$ ou $v=0_V$*

O vetor 0_V é chamado de **vetor nulo** do espaço vetorial e varia de acordo com o modo que a operação soma é definida. Nesse momento da matéria, iremos expandir nossa interpretação de **vetores** e, a partir de agora, não só setinhas serão vetores. Os números reais, polinômios, matrizes e funções também receberão essa nomenclatura.

*Importante para identificar espaços

2. Combinação Linear

O conceito de combinação linear permanece o mesmo de quando estávamos trabalhando com o V^3. Ele só é expandido para todos os outros conjuntos com os quais vamos trabalhar. Portanto, um vetor v é combinação linear de $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ se existem coeficientes $\{a, b, \dots, z\}$ que satisfazem:

$$v = au_1 + bu_2 + \cdots + zu_n, \quad com\ a, b, \dots, z \in \mathbb{R}$$

3. Dependência Linear

Novamente, o conceito é análogo com o que já vimos para o V^3. Um conjunto $S = \{v_1, v_2, \dots v_n\}$ é

a. Linearmente dependente, se houver qualquer combinação linear dentro.

b. Linearmente independente, se não houver.

4. Subespaço Vetorial

Um subespaço vetorial é um **espaço vetorial** contido dentro de **outro** espaço vetorial. Portanto, é um **subconjunto** W contido em um espaço vetorial V, que obedece às seguintes propriedades:

a. $0_V \in W$
b.$\forall w_1, w_2 \in W,\ w_1 + w_2 \in W$
c. $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall w \in W,\ \lambda w \in W$

Ou seja, para um subconjunto W ser considerado um subespaço vetorial, ele deve conter **todas** as **combinações lineares** possíveis entre seus elementos.

Portanto, podemos definir algo chamado **conjunto gerador**. Se temos n vetores e todos os vetores em um subespaço vetorial são combinações lineares desses n vetores, então eles serão um **conjunto gerador** desse subespaço vetorial.

Então, se temos o conjunto $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ como gerador de um subespaço S, indicamos com o uso de colchetes:

$$S = [u_1, u_2, \dots, u_n]$$

5. Base

Agora que sabemos a definição de **conjunto gerador**, podemos definir a **base** de um subespaço como um *conjunto gerador LI*. Portanto, se tivermos um conjunto $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ que é LI e é capaz de gerar **todos** os vetores de um subespaço S, então dizemos que uma base para S é $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$.

A partir de agora, temos a introdução do conceito de **bases canônicas**. A base canônica de um espaço vetorial é realmente a base **mais fácil** de pensar. Então, por exemplo, a base canônica do $P_n(x)$, espaço vetorial dos polinômios, é:

$$B = \{1, x, x^2, x^3, \dots, x^n\}$$

6. Coordenadas

O conceito de coordenadas é análogo também ao que já foi aprendido. As coordenadas de um vetor v em uma base $B = \{v_1, v_2, v_3, \dots\}$ são os coeficientes da combinação linear deles que gera v. Além disso, a soma e o produto por escalar continuam funcionando como anteriormente.

$$v = (x, y, z, \dots)_B \Leftrightarrow v = xv_1 + yv_2 + zv_3 + \cdots$$

$$v_1 + v_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2, \dots)_B$$

$$\alpha v = (\alpha x, \alpha y, \alpha z, \dots)_B$$

Passar vetores para coordenadas será ainda mais importante nessa parte do curso. Com isso, sempre poderemos transferir um problema do $P_n(x)$ ou do M_{mxn} para o $\mathbb{R}^n$. Essa prática acaba por facilitar muito a resolução de problemas.

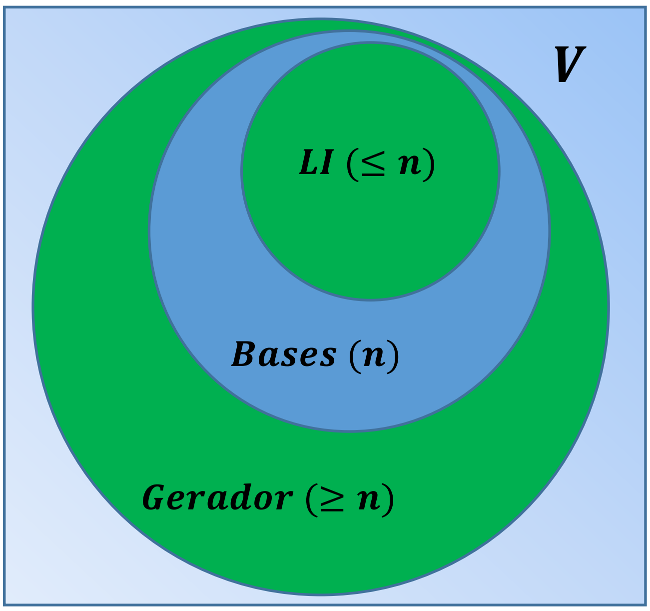
7. Dimensão

A dimensão de um subespaço vetorial é a **quantidade** de vetores na base desse subespaço. Portanto, a dimensão de um subespaço é **sempre** a mesma.

$$\dim(V) = \#vetores\ da\ base$$

8. Teorema do Completamento

Todo subconjunto LI de V pode ser aumentado até uma base e todo conjunto gerador de V contém uma base. O número máximo de vetores LI em um subespaço é a **dimensão** do subespaço. Ou seja, se a dimensão de um subespaço é igual a n, então:



a. Se um conjunto gerador tem n vetores LI, ele é uma base;
b. Se um conjunto gerador tem mais que n vetores, ele é LD;
c. Se um conjunto LI contém menos que n vetores, ele está contido em alguma base.

9. Métodos Práticos

Há diversos métodos práticos para encontrar uma base e a dimensão de um subespaço. Caso o subespaço seja dado na forma:

$$S = [v_1, v_2, \dots v_k] \text{ (}S\text{ gerado pelo conjunto)}$$

Temos como definir uma base e a dimensão dele colocando os vetores geradores, escritos na base canônica do espaço vetorial, em **linhas** de uma matriz e escaloná-la. Ao fim, o número de linhas **não nulas** será igual à dimensão do subespaço vetorial.

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_k \end{pmatrix} \rightarrow escalonar \rightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \dim(V) = n^{\underline{o}}\ de\ linhas\ não\ nulas$$

Além disso, temos como bônus que as linhas não nulas da matriz, após escalonada, serão uma **base** do subespaço vetorial dado.

Agora, caso o subespaço seja dado de forma que consigamos gerar um **sistema homogêneo** de equações com as proposições dadas. Dessa forma:

$$S = \{(x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^n : A[X] = [0]\} \text{ (}S\text{ dado em coordenadas que seguem as equações } AX = 0\text{)}$$

Temos que montar a matriz A de coeficientes desse sistema e escaloná-la. A dimensão do subespaço gerado será o número de **variáveis livres** do sistema, ou seja, o número de variáveis menos o número de pivôs.

$$A \rightarrow escalonar \rightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \dim(V) = n - \#piv\hat{o}s \text{ (\#variáveis livres)}$$

Já para encontrar uma base para esse subespaço, precisamos terminar de resolver esse sistema homogêneo em função das variáveis livres.

10. Interseção de Subespaços

A interseção de subespaços é formada pelos vetores contidos tanto em S_1 quanto em S_2:

$$S_1 \cap S_2 = \{v \in S_1 \ e \ v \in S_2\}$$

O método mais fácil para encontrar uma base e a dimensão da interseção entre dois subespaços é montar o sistema com as equações que definem **ambos** os subespaços e resolvê-lo. Dessa forma, garantimos que as soluções encontradas satisfazem ambos os subespaços e, portanto, estão contidas na intersecção. Assim, se:

$$S_1 = \{(x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^n : A_1[X] = [0]\}$$

$$S_2 = \{(x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^n : A_2[X] = [0]\}$$

Então:

$$S_1 \cap S_2 = \{(x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^n : A[X] = [0]\}$$

Onde

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$$

11. Soma de Subespaços

Não podemos definir a **união de subespaços** como um subespaço porque nem sempre a **soma** ou o **produto por escalar** vão estar contidos na união de dois subespaços S_1 e S_2. Portanto, definimos a **soma de subespaços** como o **menor** subespaço que **contém** a união dos dois subespaços. Assim,

$$S_1 + S_2 = \{w \in S_1 + S_2 : w = u + v, com\ u \in S_1\ e\ v \in S_2\}\ \text{(União com soma)}$$

Se os dois subespaços têm vetores geradores tais que:

$$S_1 = [v_1, v_2, \dots v_m]$$

$$S_2 = [u_1, u_2, \dots u_k]$$

Então, a soma será gerada pelos geradores de S_1 unidos aos geradores de S_2:

$$S_1 + S_2 = [v_1, v_2, \dots v_m, u_1, u_2, \dots u_k]$$

Para encontrar a **base** e a **dimensão** dessa soma, podemos montar a matriz com os geradores do subespaço $S_1 + S_2$ e escaloná-la. Assim, as linhas não nulas serão uma base dessa soma e a quantidade delas será a dimensão do mesmo.

12. Teorema das Dimensões

Temos uma relação entre a soma e a interseção entre subespaços. Ela se dá por:

$$\dim(S_1 + S_2) = \dim(S_1) + \dim(S_2) - \dim\,(S_1 \cap S_2)$$

Caso a dimensão da interseção seja 0, ou seja, o único vetor contido nos dois subespaços é o vetor 0_V, dizemos que a soma entre os dois subespaços é uma **soma direta**, porque podemos obter a dimensão da soma **diretamente** a partir da soma das dimensões:

$$\dim(S_1 \oplus S_2) = \dim(S_1) + \dim(S_2) \qquad (\dim(S_1 \cap S_2) = 0)$$

Exercícios

1. Dependência Linear

P3 2016 Álgebra Linear I, exercício 11

Seja V o espaço vetorial das funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e considere as funções $f_1, f_2, f_3, f_4 \in V$ definidas por:

$$f_1(x) = x^2, \qquad f_2(x) = 1, \qquad f_3(x) = \sin^2 x\,, \qquad f_4(x) = \cos^2 x$$

para todo x pertencente reais. Assinale a alternativa correspondente a um subconjunto linearmente dependente de V:

A. $\{f_2 + f_3, f_2 + f_4, f_3 + f_4\}$
B. $\{f_1, f_2, f_3\}$
C. $\{f_1 + f_2 + f_3, f_3, f_4\}$
D. $\{f_1 + f_2 + f_3, f_2 + f_3, f_3\}$
E. $\{f_1, f_2 + f_3, f_2 + f_4\}$

2. Bases e Coordenadas

P3 2016 Álgebra Linear I, exercício 8

Considere a base:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

do espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$. Se (a, b, c, d) denotam as coordenadas do vetor

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

na base B, então $a+b+c+d$ é igual a:

A. 13
B. 0
C. 7
D. 6
E. 16

3. Propriedades do Espaço Vetorial

P3 2015, Álgebra Linear I, exercício 6

Considere o espaço vetorial $V = \{(x,y): x,y \in \mathbb{R}\}$ com operações de soma e multiplicação por escalar definidas, respectivamente, por:

$$(x_1,y_1)\oplus(x_2,y_2) = (x_1+x_2-1, y_1+y_2-1),$$

$$\alpha \odot (x,y) = (\alpha x - \alpha + 1, \alpha y - \alpha + 1),$$

Para todos $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x,y) \in V$ e todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Considere a base $\mathcal{B} = [(2,1),(-1,3)\}$ de V e o vetor $v \in V$ cujas coordenadas em relação à base $\mathcal{B}$ são $(1,-2)$. Temos que v é igual a:

A. $(-1,5)$
B. $(6,-3)$
C. $(4,-5)$
D. $(1,-2)$
E. $(-2,0)$

4. Bases e Dimensão

P3 2015 Álgebra Linear I, exercício 7

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e igual a n e sejam dados vetores dois a dois distintos $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$. Considere as seguintes afirmações:

I. Se $k > n$, então $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ é linearmente dependente;
II. Se $k < n$, então $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ é linearmente independente;
III. Se $k = n$, então $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ é uma base de V.

Assinale a alternativa correta:

A. Apenas as afirmações II e III são verdadeiras.
B. Apenas a afirmação III é verdadeira.
C. Apenas a afirmação II é verdadeira.
D. Apenas as afirmações I e II são verdadeiras.
E. Apenas a afirmação I é verdadeira.

5. Bases e Dimensão

P3 2016 Álgebra Linear I, exercício 15

Sejam $n \geq 2$ um inteiro, V um espaço vetorial de dimensão n e sejam dados vetores dois a dois distintos $v_1, v_2, \dots, v_{n+1} \in V$. Considere as seguintes afirmações:

I. Se $V = [v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n+1}]$, então $V = [v_1, v_2, \dots, v_n]$;
II. Se o conjunto $A = \{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$ é linearmente independente, então $A \cup \{v\}$ é uma base de V, para qualquer $v \in V$ que não pertença a A;
III. Se o conjunto $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é linearmente independente, então $B \cup \{v\}$ é linearmente dependente, para qualquer $v \in V$ que não pertença a B.

Assinale a alternativa correta:

A. Apenas as afirmações II e III são verdadeiras.
B. Apenas a afirmação III é verdadeira.
C. Apenas as afirmações I e III são verdadeiras.
D. Nenhuma das afirmações é verdadeira.
E. Todas as afirmações são verdadeiras.

6. Reconhecendo Subespaços Vetoriais

P3 2016, Álgebra Linear I, exercício 10

Assinale a alternativa em que o conjunto S **não** é um subespaço do espaço vetorial V:

A. $V = P(\mathbb{R})$ e $S = \{p \in V : p(1) = 0 \ e \ p'(3) = 0\}$;
B. $V = M_3(\mathbb{R})$ e $S = (A \in V : A + A^t = 0\}$, onde A^t denota a transposta da matriz A;
C. $\mathrm{V} = \mathbb{R}^3$ e $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 0\}$;
D. $V = M_2(\mathbb{R})$ e $S = \{A \in V : \det(A) = 0\}$;
E. V é o espaço vetorial das funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que são deriváveis e S é o subconjunto de V formado pelas funções $f \in V$ tais que vale a igualdade $e^x f'(x) + f(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

7. Dimensão de Subespaço

P3 2017, Álgebra Linear I, exercício 11

Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e seja S o subespaço de $M_2(\mathbb{R})$ definido por:

$$S = \{B \in M_2(\mathbb{R}): BA = AB\}.$$

Temos que a dimensão de S é igual a:

A. 2
B. 3
C. 4
D. 1
E. 0

8. Dimensão de Subespaços

P3 2017, Álgebra Linear I, exercício 8 - Adaptado

Considere os subespaços S_1 e S_2 de $P_3(\mathbb{R})$ definidos por:

$$S_1 = \{p \in P_3(\mathbb{R}): p(1) + p(-1) = 0\}$$

$$S_2 = \{\, p \in P_3(\mathbb{R}): p'(1) + p'(-1) = 0\}$$

Temos que as dimensões de S_1 e de S_2 são iguais a:

A. $\dim S_1 = 3$ e $\dim S_2 = 2$
B. $\dim S_1 = 2$ e $\dim S_2 = 2$
C. $\dim S_1 = 3$ e $\dim S_2 = 3$
D. $\dim S_1 = 2$ e $\dim S_2 = 3$
E. $\dim S_1 = 4$ e $\dim S_2 = 2$

9. Bases de Subespaços

P3 2016 Álgebra Linear I, exercício 9

Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere o subconjunto:

$$B = \{a + t, 1 + t + t^2, t + t^2 + t^3, t^2 + at^3\}$$

do espaço vetorial $P_3(\mathbb{R})$. Temos que B é uma base de $P_3(\mathbb{R})$ se, e somente, se:

A. $a \neq \frac{1}{2}$
B. $a = 1$
C. $a \neq 1$
D. $a = \frac{1}{2}$
E. $a \neq -1$

10. Bases de Subespaços

P3 2016 Álgebra Linear I, exercício 2

Considere o subconjunto A do espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ dado por:

$$A = \{(1,2,0,1), (0,1,1,2), (1,3,1,3), (0,2,2,4)\}$$

e seja S o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado por A. O número de subconjuntos de A que são uma base de S é igual a:

A. 2
B. 5
C. 1
D. 4

E. 6

11. Verificando Vetor contido no Subespaço

Lista 3 2017, Álgebra Linear I, exercício 26

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e considere os seguintes elementos do espaço vetorial $P_3(\mathbb{R})$:

$$p_1(x) = 1 + 2x + x^3, \qquad p_2(x) = x + x^2 - x^3, \qquad p_3(x) = a + x + bx^2 + 5x^3$$

Se $p_3(x) \in [p_1(x), p_2(x)]$, então $a + b$ é igual a:

A. 1
B. 3
C. -2
D. 2
E. -1

12. Comparação de Subespaços

P3 2016 Álgebra Linear I, exercício 4

Considere os subespaços de $P_3(\mathbb{R})$ definidos por:

$$S_1 = \{p \in P_3(\mathbb{R}) : p'(1) = 0\}, \quad S_2 = [t^2 - 2t, t^3 - 3t, t^3 - t^2 - t],$$
$$S_3 = [1, (t-1)^2, (t-1)^3]$$

Assinale a alternativa correta:

A. $S_1 = S_2, S_1 \neq S_3$ e S_3 está contido em S_1
B. $\dim(S_1) = \dim(S_2) = \dim(S_3) = 3$
C. $S_1 = S_2 = S_3$

D. $S_1 = S_3$ e S_1 está contido em S_2
E. $S_1 = S_3, S_1 \neq S_2$ e S_2 está contido em S_1

13. Dimensão da Soma e da Intersecção

P3 2015, Álgebra Linear I, exercício 2

Considere os subespaços S_1 e S_2 de $\mathbb{R}^4$ definidos por:

$$S_1 = [(1,0,-1,0),(1,2,1,2)], \qquad S_2 = [(0,1,1,1),(1,0,0,1)].$$

Assinale a alternativa correta:

A. $\dim(S_1 + S_2) = 2$ e $\dim(S_1 \cap S_2) = 2$
B. $\dim(S_1 + S_2) = 4$ e $\dim(S_1 \cap S_2) = 1$
C. $\dim(S_1 + S_2) = 4$ e $\dim(S_1 \cap S_2) = 0$
D. $\dim(S_1 + S_2) = 3$ e $\dim(S_1 \cap S_2) = 1$
E. $\dim(S_1 + S_2) = 3$ e $\dim(S_1 \cap S_2) = 0$

14. Intersecção de Subespaços

P3 2017, Álgebra Linear I, exercício 3

Considere os subespaços S_1 e S_2 de $M^3(\mathbb{R})$ definidos por :

$$S_1 = \{A - A^t : A \in M^3(\mathbb{R})\} \text{e } \ S_2 = \{A \in M^3(\mathbb{R}) : \mathrm{tr}(A) = 0\},$$

em que A^t denota a transposta da matriz A e $\mathrm{tr}(A)$ denota a soma dos elementos na diagonal principal de A. Temos que a dimensão $S_1 \cap S_2$ é igual a:

A. 3
B. 2

C. 1
D. 4
E. 0

15. Relação entre Dimensões

P3 2017, Álgebra Linear I, exercício 5

Seja V um espaço vetorial de dimensão 15 e sejam S_1 e S_2 subespaços de V tais que:

$$\dim(S_1) = \dim(S_2) \leq 8$$

e $V = S_1 + S_2$. Considere as seguintes afirmações:

I. $\dim(S_1 \cap S_2) \geq 2$;
II. Existe $v \in S_1 \cap S_2$ tal que $S_1 \cap S_2 = [v]$;
III. Se $S_1 \cap S_2 \neq \{0\}$, então para quaisquer $v, w \in S_1 \cap S_2$ tais que $v \neq w$, vale que o conjunto $\{v, w\}$ é linearmente dependente.

Assinale a alternativa correta:

A. Apenas a afirmação II é verdadeira.
B. Apenas as afirmações I e II são verdadeiras.
C. Apenas a afirmação III é verdadeira.
D. Apenas a afirmação I é verdadeira.
E. Apenas as afirmações II e III são verdadeiras.

16. Espaço Vetorial

P3 2016, Álgebra Linear I, exercício 1

Seja V um espaço vetorial e considere as seguintes afirmações:

I. Se A_1 é um conjunto de geradores de um subespaço S_1 de V e A_2 é um conjunto de geradores de um subespaço S_2 de V, então $A_1 \cup A_2$ é um conjunto de geradores do subespaço $S_1 + S_2$;
II. Se A_1 é um conjunto de geradores de um subespaço S_1 de V e A_2 é um conjunto de geradores de um subespaço S_2 de V, então $A_1 \cap A_2$ é um conjunto de geradores do subespaço $S_1 \cap S_2$;
III. Se $S_1, S_2\ e\ S_3$ são subespaços de V tais que

$$S_1 \cap S_2 = \{0\} \qquad \text{e} \qquad S_1 \cap S_3 = \{0\},$$

então $S_1 \cap (S_2 + S_3) = \{0\}$.

Assinale a alternativa correta:

A. Apenas a afirmação I é verdadeira.
B. Apenas as afirmações I e II são verdadeiras.
C. Todas as afirmações são verdadeiras.
D. Apenas as afirmações I e III são verdadeiras.
E. Apenas as afirmações II e III são verdadeiras.

Gabarito

1. Alternativa A.

2. Alternativa C.

3. Alternativa B.

4. Alternativa E.

5. Alternativa B.

6. Alternativa D.

7. Alternativa A.

8. Alternativa C.

9. Alternativa A.

10. Alternativa B.

11. Alternativa E.

12. Alternativa E.

13. Alternativa D.

14. Alternativa A.

15. Alternativa E.

16. Alternativa A.