www.estudar.com.vc

Técnicas de Integração

Exercício 7d Integral Imprópria

Resolução

7. Calcule as seguintes integrais impróprias, indicando o resultado (caso sejam convergentes), ou mostrando que são divergentes.

d. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$

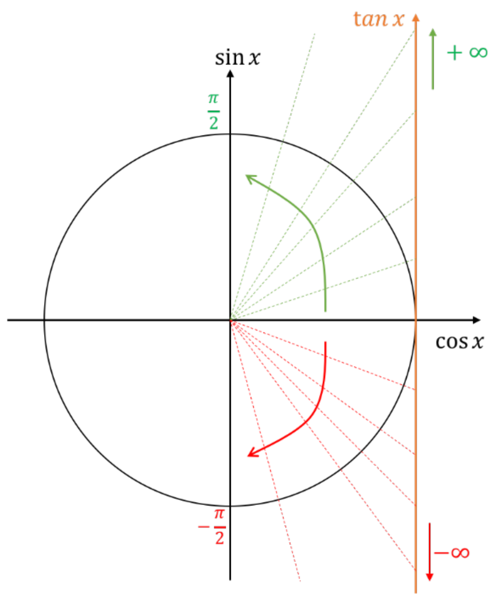
A técnica para calcular integrais impróprias com os dois limites impróprios é a mesma:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{t\to\infty} \int_{-t}^{t} \frac{1}{1+x^2} dx$$

Uma primitiva de $\frac{1}{1+x^2}$ é $\arctan x$. Logo:

$$\lim_{t\to\infty} \int_{-t}^{t} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{t\to\infty} [\arctan x]_{-t}^{t} = \lim_{t\to\infty} (\arctan t - \arctan(-t))$$

Para calcular os limites de $\arctan t$ e $\arctan(-t)$ com t tendendo a infinito, podemos recorrer ao círculo trigonométrico:



Notamos que:

$$\lim_{t\to\infty}(\arctan t) = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{t\to\infty}(\arctan(-t)) = -\frac{\pi}{2}$$

Ou seja, quando a tangente tende a ∞, o ângulo tende a $\frac{\pi}{2}$. E quando a tangente tende a $-\infty$, o ângulo tende a $-\frac{\pi}{2}$. Logo:

$$\lim_{t\to\infty}\int_{-t}^{t}\frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

Resposta esperada: π