www.estudar.com.vc

Técnicas de Integração

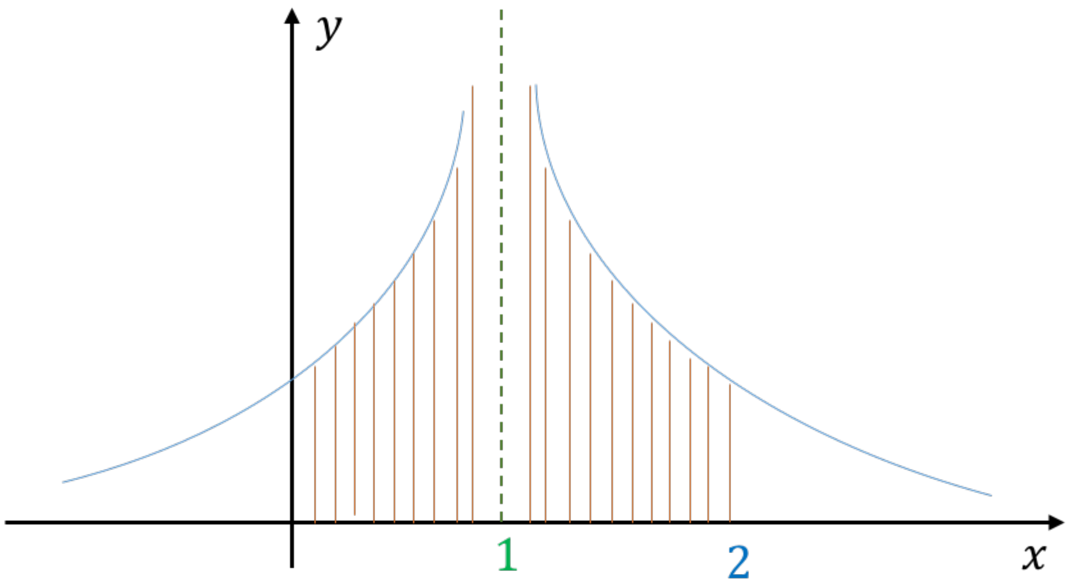
Exercício 7g Integral Imprópria

Resolução

7. Calcule as seguintes integrais impróprias, indicando o resultado (caso sejam convergentes), ou mostrando que são divergentes.

g. $\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^2}\, dx$

A função $\frac{1}{(x-1)^2}$ **não** está **definida em** $x = 1$, então, temos uma **assíntota vertical** neste ponto, como esboçado na figura abaixo:



Observe que $x = 1$ está no **interior do limite de integração** $[0, 2]$. Portanto, para calcular esta integral imprópria, é necessário separá-la na **soma de duas integrais:**

$$\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^2} dx = \int_0^1 \frac{1}{(x-1)^2} dx + \int_1^2 \frac{1}{(x-1)^2} dx$$

Podemos lembrar que uma primitiva de $\frac{1}{(x-1)^2}$ é a expressão $-\frac{1}{x-1}$, pela regra do tombo e regra da substituição.

Para a primeira integral, temos:

$$\int_0^1 \frac{1}{(x-1)^2}dx = \lim_{t \to 1^-} \int_0^t \frac{1}{(x-1)^2}dx = \lim_{t \to 1^-} \left[-\frac{1}{x-1}\right]_0^t =$$

$$= -\lim_{t \to 1^-} \left(\frac{1}{t-1} - (-1)\right) \to -(-\infty + 1) = +\infty$$

Como t tende a 1 **pela esquerda**, o denominador tende a zero por **valores negativos**, de modo que $\lim\limits_{t \to 1^-} \left(\frac{1}{t-1}\right) = -\infty$.

Para a segunda integral, procedemos de maneira similar:

$$\int_1^2 \frac{1}{(x-1)^2}dx = \lim_{t \to 1^+} \int_t^2 \frac{1}{(x-1)^2}dx = \lim_{t \to 1^+} \left[-\frac{1}{x-1}\right]_t^2 =$$

$$= -\lim_{t \to 1^+} \left(1 - \frac{1}{t-1}\right) \to -(1 - (+\infty)) = +\infty$$

A variável t tende a 1 **pela direita**, de modo que o denominador tende a zero por **valores positivos**. Portanto, $\lim\limits_{t \to 1^+} \left(\frac{1}{t-1}\right) = +\infty$.

Concluindo, a integral diverge, pois:

$$\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^2}dx = \int_0^1 \frac{1}{(x-1)^2}dx + \int_1^2 \frac{1}{(x-1)^2}dx = \infty + \infty = +\infty$$

Resposta esperada: A integral diverge