



www.estudar.com.br

Técnicas de Integração

Exercício 3e Integração por Partes

Resolução





3. Calcule as seguintes integrais, utilizando a técnica de integral por partes:

e. $\int \arctan x \, dx$

Para calcular $\int \arctan x \, dx$ por partes, definimos:

$$u = \arctan x \Rightarrow du = \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$dv = dx \Rightarrow v = x$$

Assim, temos que:

$$\int \arctan x \, dx = \int u \, dv = uv - \int v \, du = x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx$$

A integral obtida no lado direito é relativamente simples de calcular, podendo ser resolvida por substituição. Definindo:

$$w = 1 + x^2 \Rightarrow dw = 2x \, dx \Rightarrow x \, dx = \frac{dw}{2}$$

Temos que:

$$\int \frac{x}{1+x^2} dx = \int \frac{dw/2}{w} = \frac{1}{2} \int \frac{dw}{w} = \frac{1}{2} \ln |w|$$

Voltando à variável x :

$$\int \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \ln |w| = \frac{1}{2} \ln |1+x^2| = \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$$



Na última passagem acima, usamos o fato de que $1 + x^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, o que nos permitiu omitir o módulo.

Finalmente, substituindo na integral por partes, e adicionando a constante de integração:

$$\begin{aligned}\int \arctan x \, dx &= x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx \\ &= x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + K, K \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Resposta esperada: $x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + K, K \in \mathbb{R}$