estudar.com.vc

Métodos Numéricos

Sistemas Lineares

Lista de Exercícios

1. Aritmética do Ponto Flutuante + Método da Eliminação de Gauss + Método LU

P1 de 2007 – Questão 1 (Adaptada)

a. Resolva o sistema linear a seguir pelo método de Eliminação de Gauss (sem condensação pivotal) com aritmética de ponto flutuante com 3 algarismos significativos.

$$\begin{bmatrix} 4.0 & 2.0 & 1.0 \\ 2.0 & 4.0 & 2.0 \\ 1.0 & 2.0 & 4.0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.0 \\ 2.0 \\ 2.0 \end{bmatrix}$$

b. Seja U a matriz triangular superior obtida no método de Eliminação de Gauss e L a matriz triangular inferior formada pelos multiplicadores calculados (em suas respectivas posições) e com a diagonal formada por 1's ($L_{i,i} = 1, i = 1,2,3$). Verifique que LU=A, onde A é a matriz original do sistema, e resolva o sistema utilizando as matrizes L e U.

2. Aritmética de ponto flutuante + Método da eliminação de Gauss

P1 de 2009 – Questão 1

Quatro pessoas estão em fila para depositar dinheiro no banco. Cada um irá depositar cem reais a mais que metade da soma dos depósitos dos seus vizinhos na fila (quem está nos extremos da fila tem um só vizinho, os outros tem 2). Escreva (na forma Ax = b) um sistema linear 4x4 para determinar qual o montante x_i que a i-ésima pessoa irá depositar (para $i = 1, \dots, 4$) e o resolva pelo método de eliminação de Gauss com condensação pivotal e aritmética de ponto flutuante com dois algarismos significativos.

3. Aritmética do Ponto Flutuante + Método da Eliminação de Gauss + Refinamento + Método de Gauss-Seidel

Lista de Sistemas Lineares da Disciplina – Exercício 2 (Adaptado)

É dado o sistema linear:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 6x_3 = 3 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - 5x_2 - 2x_3 = -4 \end{cases}$$

a. Resolva o sistema dado pelo método de Gauss com condensação pivotal, utilizando ponto flutuante com 2 algarismos significativos

b. Efetue uma iteração do refinamento da solução

c. Verifique se o sistema linear dado satisfaz o Critério de Sassenfeld. Em caso negativo, troque a posição das equações no sistema, de forma que, para o sistema equivalente assim obtido, o Critério das Linhas assegure a convergência do Método de Gauss-Seidel.

d. Calcule duas iterações pelo Método de Gauss-Seidel a partir de $\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}\right) = (0,0,0)$ para o sistema que converge no item (c).

e. Sem efetuar as iterações, e partindo da aproximação inicial $x_1^{(0)} = 0, x_2^{(0)} = 0, x_3^{(0)} = 0$, bem como sabendo que $|x_1| \leq 2, |x_2| \leq 2, |x_3| \leq 2$, determine um número de iterações que assegure um erro inferior a $\varepsilon = 0{,}01$ em cada uma das variáveis, ao se aplicar o Método de Gauss-Seidel ao sistema para o qual tal método converge, conforme o item (c).

4. Método LU + Método de Gauss-Seidel

P1 de 2016 – Questão 2

Considere o sistema linear:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 8 \\ -1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1/2 \\ 3/2 \end{bmatrix}$$

a. Determine a decomposição LU da matriz do sistema ou da matriz obtida desta através de uma permutação de linhas. Utilize a decomposição para resolver o sistema. (Obs: trabalhe com frações.)

b. Reescreva o sistema, ordenando as incógnitas e equações de forma que o método de Gauss-Seidel seja convergente quando aplicado ao sistema resultante. Calcule uma iteração do método a partir de $x^{(0)} = (0, -\frac{1}{2}, 1)$. Delimite o erro após essa iteração e estime o número de iterações necessárias para garantir um erro menor que 10^{-3}, sem utilizar o conhecimento da solução.

Gabarito

1.

a. $x_1 = 0.333, x_2 = 0.167, x_3 = 0.333$

b. $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ 0.25 & 0.5 & 1 \end{pmatrix} e\ U = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1.5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow LU = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = A$

$x_1 = 0.333, x_2 = 0.167, x_3 = 0.333$

2. $x_1 = 400, x_2 = 600, x_3 = 600, x_4 = 400$

3.

a. $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0.0044$

b. $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = -0.0018$

c. Permutação que garante convergência: $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & -5 & -2 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

d. $x_1 = 0.91, x_2 = 0.91, x_3 = 0.05$

e. $n \geq 19$

4.

a. $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $U = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 8 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

$x = 1/4, y = 1/2, z = 1/2$

b. $\begin{pmatrix} 8 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1/2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

$x = 1/64, y = 21/32, z = 3/16$

$Erro \leq 1.02$

$n \geq 57$