www.estudar.com.vc

P1 2017 Unicamp
Resolução
Exercício 1 Desigualdade com Limites
Explicação

1. Encontre todos valores de a tais que

$$\lim_{x \to a} \frac{x-2}{x+5} > 0$$

Para resolvermos essa desigualdade, precisamos dividi-la em dois casos: quando $a \neq -5$ e quando $a = -5$.

1º Caso: $a \neq -5$

Nesse caso, como a função $f(x) = \frac{x-2}{x+5}$ está definida e é **contínua** em todo $x \neq -5$, temos que:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Dessa forma, a desigualdade se reduz a:

$$\frac{a-2}{a+5} > 0$$

Para determinar os a que satisfazem essa igualdade, devemos **analisar o sinal** do numerador e do denominador de $f(a)$.

Analisando primeiro o sinal do **numerador** $(a-2)$:

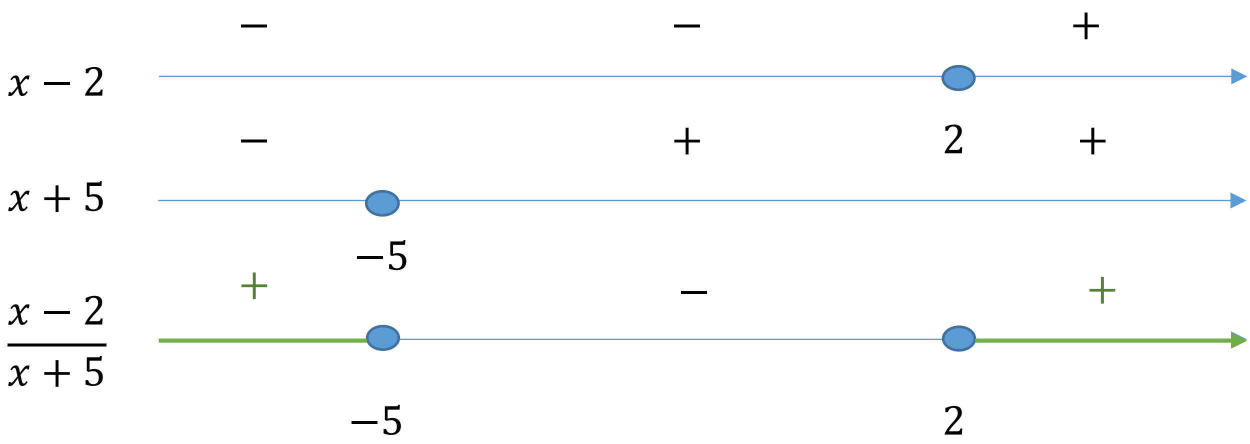
- Se $\boldsymbol{a < 2}$, o numerador será **negativo**.
- Se $\boldsymbol{a > 2}$, o numerador será **positivo**.

Analisando o **denominador** $(a+5)$:

- Se $\boldsymbol{a < -5}$, o denominador será **negativo**.
- Se $\boldsymbol{a > -5}$, o denominador será **positivo**.

Para a inequação ser satisfeita, o numerador e denominador devem ter o **mesmo sinal**. Isso porque, quando feita a divisão, o resultado deve ser um número **maior do que zero**.

Para facilitar nossa análise do sinal de $f(a)$, vamos montar essa tabela:



Dessa forma, se $a < -5$ ou $a > 2$, a inequação é satisfeita.

2º Caso: $a = -5$

Para esse caso, precisamos analisar o seguinte limite:

$$\lim_{x \to -5} \frac{x-2}{x+5}$$

Tentando substituir na função, chegamos na expressão $\frac{-7}{0}$. Isso mostra que o limite tende a $\pm\infty$. Temos que analisar os limites laterais então, começando pelo **esquerdo**:

$$\lim_{x \to -5^-} \frac{x-2}{x+5}$$

Como o limite está tendendo a menos cinco pela esquerda e, como mostrado no quadro de sinais do primeiro caso, o numerador e o denominador são negativos quando $x < -5$, então esse limite tende a $+\infty$.

$$\lim_{x \to -5^-} \frac{x-2}{x+5} = +\infty$$

Já pela direita, como o denominador é positivo quando $x > -5$ e o numerador tende a -7, temos que o limite tende a $-\infty$.

$$\lim_{x \to -5^+} \frac{x-2}{x+5} = -\infty$$

Dessa forma, $\lim_{x \to -5} \frac{x-2}{x+5}$ **não existe**, uma vez que os **limites laterais são diferentes**.

Assim, $a = -5$ **não** satisfaz a desigualdade.

Temos então que essa desigualdade **será satisfeita** apenas quando $a < -5$ ou $a > 2$.

Resposta esperada: essa inequação será satisfeita para todo $a < -5$ ou $a > 2$.