www.estudar.com.vc

P2 2017.1 Diurno
Unicamp Adaptada
Exercício Dissertativo Item b
Quantidade de Movimento
Explicação

12. Dois pêndulos simples têm o mesmo comprimento L e estão amarrados no mesmo ponto O. Nas suas extremidades estão fixadas duas bolinhas, $A1$ e $A2$, pontuais e de massas m_1 e m_2, respectivamente. No inicio, $A1$ e $A2$ estão em equilíbrio. $A2$ é afastada da posição de equilíbrio de um ângulo α_0 e é solta sem velocidade inicial.

b. Considerando a colisão como perfeitamente elástica, determine as velocidades das bolinhas logo após a colisão, e os ângulos máximo α_1 e α_2 de $A1$ e $A2$ depois da colisão, em função de α_0 e da razão das massas $x = \frac{m_2}{m_1}$. Discuta os limites para $x \gg 1$, $x = 1$ e $x \ll 1$.

Primeiro, vamos escrever a expressão de **conservação do momento linear** das bolas, usando a velocidade que encontramos para $A2$ antes da colisão no item **a.**:

$$p_i = p_f \rightarrow m_1 \cancelto{0}{v_{i1}} + m_2 v_{i2} = m_1 v_{f1} + m_2 v_{f2}$$

$$m_2 v_2 = m_1 v_{f1} + m_2 v_{f2}$$

Podemos dividir tudo por m_1 para usarmos a razão x:

$$x \cdot v_2 = v_{f1} + x \cdot v_{f2} \rightarrow v_{f2} = \left(v_2 - \frac{v_{f1}}{x}\right) \ (I)$$

Agora, vamos usar a outra informação que o enunciado nos deu: a colisão é **perfeitamente elástica**. Ou seja, há **conservação da energia cinética** na colisão.

Dessa forma, podemos escrever a seguinte expressão:

$$\frac{m_1 \cancelto{0}{v_{i1}^2}}{2} + \frac{m_2 v_{i2}^2}{2} = \frac{m_1 v_{f1}^2}{2} + \frac{m_2 v_{f2}^2}{2} \rightarrow m_2 v_2^2 = m_1 v_{f1}^2 + m_2 v_{f2}^2$$

Dividindo novamente por m_1:

$$x \cdot v_2^2 = v_{f1}^2 + x \cdot v_{f2}^2$$

Podemos substituir com a expressão encontrada em (I):

$$x \cdot v_2^2 = v_{f1}^2 + \ x \cdot \left(v_2 - \frac{v_{f1}}{x}\right)^2$$

$$x \cdot v_2^2 = v_{f1}^2 + x \cdot v_2^2 + \frac{v_{f1}^2}{x} - 2\ v_2\ v_{f1}$$

$$v_{f1} = \frac{2\ x}{x+1} v_2$$

Usando a expressão (I) mesmo podemos encontrar v_{f2}:

$$v_{f2} = \left(v_2 - \frac{\frac{2\ x}{x+1} v_2}{x}\right) \rightarrow \ v_{f2} = \frac{x-1}{x+1} v_2$$

Agora, para encontrarmos ângulos máximos α_1 e α_2 nós precisamos de uma expressão da altura em função das velocidades de partida das bolinhas, devido à relação que encontramos no item **a.**:

$$h = L(1 - cos\alpha)\ (II)$$

Nós encontraremos essa relação a partir da conservação de energia mecânica do sistema, em que as velocidades iniciais serão as velocidades que acabamos de encontrar, e a velocidade final será igual a 0, pois as bolas param no ponto de altura máxima. De forma genérica:

$$K_i + \cancelto{0}{U_i} = \cancelto{0}{K_f} + U_f$$

$$\frac{mv_f^2}{2} = mgh \rightarrow h = \frac{v_f^2}{2g}$$

Vamos substituir a equação (II):

$$L(1 - cos\alpha) = \frac{v_f^2}{2g} \rightarrow cos\alpha = 1 - \frac{v_f^2}{2gL}$$

Agora vamos substituir com as constantes apropriadas para cada bolinha e substituir também v_2 pela expressão que encontramos no item **a.**:

$$cos\alpha_1 = 1 - \frac{\left(\frac{2\,x}{x+1}v_2\right)^2}{2gL} = 1 - \frac{\frac{4x^2}{(x+1)^2}\left(\sqrt{2gL(1 - cos\alpha_0)}\,\right)^2}{2gL}$$

$$cos\alpha_1 = 1 - \frac{4x^2}{(x+1)^2} \cdot (1 - cos\alpha_0)$$

Analogamente com α_2:

$$cos\alpha_2 = 1 - \frac{\left(\frac{x-1}{x+1}v_2\right)^2}{2gL} = 1 - \frac{\frac{(x-1)^2}{(x+1)^2}\left(\sqrt{2gL(1-cos\alpha_0)}\right)^2}{2gL}$$

$$cos\alpha_2 = 1 - \frac{(x-1)^2}{(x+1)^2} \cdot (1 - cos\alpha_0)$$

Agora vamos encontrar as expressões para $\cos\alpha_1$ e $\cos\alpha_2$ quando $x \gg 1$, $x = 1$ e $x \ll 1$.

Para $x = 1$, teremos: $cos\alpha_1 = cos\alpha_0$ e $cos\alpha_2 = 1$.

Para $x \gg 1$, faremos os limites para x tendendo a infinito:

$$\lim_{x\to+\infty} cos\alpha_1 = \lim_{x\to+\infty} 1 - \frac{4x^2}{(x+1)^2} \cdot (1 - cos\alpha_0)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} 1 - \frac{4x^2}{x^2+2x+1} \cdot (1 - cos\alpha_0) = \lim_{x\to+\infty} 1 - \frac{4}{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}} \cdot (1 - cos\alpha_0)$$

$$= 1 - \frac{4}{1} \cdot (1 - cos\alpha_0) = 4cos\alpha_0 - 3$$

Já com $cos\alpha_2$:

$$\lim_{x\to+\infty} cos\alpha_2 = \lim_{x\to+\infty} 1 - \frac{(x-1)^2}{(x+1)^2} \cdot (1 - cos\alpha_0) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} 1 - \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x + 1} \cdot (1 - cos\alpha_0) = \lim_{x \to +\infty} 1 - \frac{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} \cdot (1 - cos\alpha_0)$$

$$= 1 - 1 \cdot (1 - cos\alpha_0) = cos\alpha_0$$

Para $x \ll 1$, teremos x tendendo a 0 por valores positivos, porque uma razão de massas não pode ser negativa. Então, para $cos\alpha_1$, teremos:

$$\lim_{x \to 0^+} cos\alpha_1 = \lim_{x \to 0^+} 1 - \frac{4x^2}{(x+1)^2} \cdot (1 - cos\alpha_0) = 1$$

Já para $cos\alpha_2$:

$$\lim_{x \to 0^+} cos\alpha_2 = \lim_{x \to 0^+} 1 - \frac{(x-1)^2}{(x+1)^2} \cdot (1 - cos\alpha_0) = cos\alpha_0$$

Resposta esperada:

$\boldsymbol{cos\alpha_1 = 1 - \frac{4x^2}{(x+1)^2} \cdot (1 - cos\alpha_0)}$

$\boldsymbol{cos\alpha_2 = 1 - \frac{(x-1)^2}{(x+1)^2} \cdot (1 - cos\alpha_0)}$

para $\boldsymbol{x = 1, cos\alpha_1 = cos\alpha_0}$ **e** $\boldsymbol{cos\alpha_2 = 1}$

para $\boldsymbol{x \gg 1, cos\alpha_1 = 4cos\alpha_0 - 3}$ **e** $\boldsymbol{cos\alpha_2 = cos\alpha_0}$

para $\boldsymbol{x \ll 1, cos\alpha_1 = 1}$ **e** $\boldsymbol{cos\alpha_2 = cos\alpha_0}$