www.estudar.com.vc

Cálculo I

Fuja do Nabo P2 2018.1 Parte 2

Resumo e Lista de Exercícios

Fórmulas e Resumo Teórico

1. Pontos Extremantes: Máximos e Mínimos

Pontos de Máximo Local: Pontos que maximizam uma função em um dado intervalo.

Pontos de Mínimo Local: Pontos que minimizam uma função em um dado intervalo.

Pontos de Máximo Global: Pontos que maximizam uma função em todo o seu domínio.

Pontos de Mínimo Global: Pontos que minimizam uma função em todo o seu domínio.

Para todo e qualquer ponto $\boldsymbol{x = a}$ que seja extremante (máximo ou mínimo local ou global) de uma função f, vale que:

$$f'(\boldsymbol{a}) = 0 \quad (x = a \text{ é um } \textbf{ponto crítico})$$

2. Pontos Críticos

Um ponto $x = c$ é ponto crítico de uma função $f(x)$ se $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe.

$$\boldsymbol{f'(c) = 0 \leftrightarrow x = c} \textbf{ é ponto crítico}$$

Em outras palavras:

"Se $x = c$ é ponto crítico de uma função $f(x)$, o coeficiente angular da reta $\boldsymbol{t}$, tangente ao gráfico de f no ponto $x = c$, que é dado por $f'(c)$, vale zero, isto é: **a reta $\boldsymbol{t}$ é horizontal**."

Graficamente, pode-se dizer que os pontos para os quais $f'(x) > 0$ são os pontos em que f é crescente. Já os pontos para os quais $f'(x) < 0$ são os pontos nos quais f é decrescente.

$$\begin{cases} f'(x) > 0 \rightarrow \; f \text{ é crescente} \\ f'(x) < 0 \rightarrow \; f \text{ é decrescente} \end{cases}$$

3. Pontos de Inflexão

Pontos de inflexão são pontos nos quais a derivada segunda de uma função vale zero. Além disso, se $x = c$ é ponto de inflexão, então $f''(c) = 0$.

$$\boldsymbol{f''(c) = 0 \leftrightarrow x = c} \textbf{ é ponto de inflexão}.$$

Graficamente, os pontos de inflexão são os pontos em que a **concavidade** do gráfico da função se altera. Além disso, os pontos para os quais $f''(x) > 0$ são pontos em que a concavidade da função f é voltada para cima. Já os pontos para os quais $f''(x) < 0$ são os pontos em que a concavidade da função f é voltada para baixo.

$$\begin{cases} f''(x) > 0 \rightarrow \; \text{concavidade voltada para cima} \\ f''(x) < 0 \rightarrow \; \text{concavidade voltada para baixo} \end{cases}$$

4. Teorema de Weierstrass

Seja $f: I \subset R \rightarrow R$ uma função contínua no **intervalo fechado** $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \subset \boldsymbol{I}$. O Teorema de Weierstrass afirma que, sob essas condições, existem $\boldsymbol{x_1}$ e $\boldsymbol{x_2}$ pertencentes a $[a, b]$, tais que:

$$\boldsymbol{f(x_1) < f(x) < f(x_2), \ \forall\, x \in [a, b]}$$

Em outras palavras:

"Se a função f for **contínua no intervalo fechado** $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$**,** existem x_1 e x_2 pertencentes a esse intervalo tais que $\boldsymbol{f(x_1)}$ **é o valor mínimo de** $\boldsymbol{f}$ em $[a, b]$ e $\boldsymbol{f(x_2)}$ **é o valor máximo de** $\boldsymbol{f}$ em $[a, b]$."

Ou ainda:

"Se a função f for **contínua no intervalo fechado** $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$**,** existem pontos de máximo e mínimo nesse intervalo: $\boldsymbol{x_1}$ **é ponto de mínimo local** de f e $\boldsymbol{x_2}$ **é ponto de máximo local** de f."

No caso em que a função $f: I \subset R \rightarrow R$ é contínua em todo o seu domínio I e este domínio é um **intervalo fechado** $[a, b]$, pode-se assegurar que existe (pelo menos um) **ponto de máximo global** de f e (pelo menos um) **ponto de mínimo global** de f.

5. Assíntotas

Uma assíntota é uma reta da qual os pontos do gráfico de uma função se aproximam, mas nunca chegam a "tocá-la". Podemos definir a assíntota de uma função $f(x)$ como uma reta da forma $\boldsymbol{y = mx + n}$, tal que:

$$\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - (mx + n)] = 0$$

De modo geral, analisamos as assíntotas à esquerda $(x \to -\infty)$ do gráfico de f e assíntotas à direita $(x \to +\infty)$ do gráfico de f. Assim:

Para assíntotas à esquerda

$$\boldsymbol{m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{n = \lim_{x \to -\infty} f(x) - mx}$$

Para assíntotas à direita

$$\boldsymbol{m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{n = \lim_{x \to +\infty} f(x) - mx}$$

Note que encontrar n depende de encontrar m. Assim, para encontrar os valores de m e n das respectivas assíntotas, devemos, primeiramente, encontrar m e, em seguida, encontrar n. Vale ressaltar que $\boldsymbol{m}$ **e** $\boldsymbol{n}$ **devem ser números reais**.

6. Esboço de Gráficos

Para esboçar gráficos, o seguinte roteiro técnico pode ser útil:

(i) Encontrar o domínio da função;
(ii) Encontrar intersecções da função com eixos coordenados;
(iii) Encontrar as assíntotas da função;
(iv) Estudar o crescimento da função por meio de sua derivada primeira e encontrar pontos de máximo e mínimo locais;
(v) Estudar a concavidade da função por meio de sua derivada segunda e encontrar pontos de inflexão;
(vi) Usar todas as informações anteriores para construir o gráfico!

Exercícios

1. Análise de Derivadas/TVI

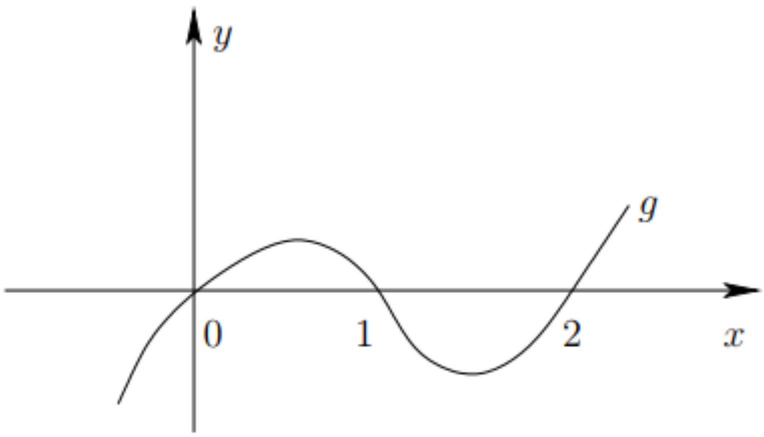
P2 2017

Qual o número de soluções reais da equação $x^6 + 2x^4 + 3x^2 + x - 4 = 0$?

2. Análise de Derivadas

P2 2017

A curva $y = g(x)$ representada abaixo é o gráfico de uma função $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua com exatamente 3 raízes reais distintas:



Se g é a derivada de uma função f, conclui-se que, necessariamente:

A. $f(0) \cdot f(2) > 0$
B. $f(1)$ é um número positivo.
C. f possui 3 pontos de inflexão.
D. f possui um único ponto de máximo local.
E. f possui pelo menos duas raízes reais distintas.

3. Máximos e Mínimos

P2 2016

Seja $f(x) = e^{2x^3+9x^2}$ definida no intervalo fechado $[-5; 1]$. Se a é o valor máximo de f e b é o valor mínimo de f, determine o produto ab.

4. Máximos e Mínimos

P2 2017

Seja $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 7$. O ponto $x = -2$ é ponto de:

A. Máximo local, mas não global.
B. Mínimo local, mas não global.
C. Máximo global.
D. Mínimo global.
E. Inflexão.

5. Problemas de Otimização

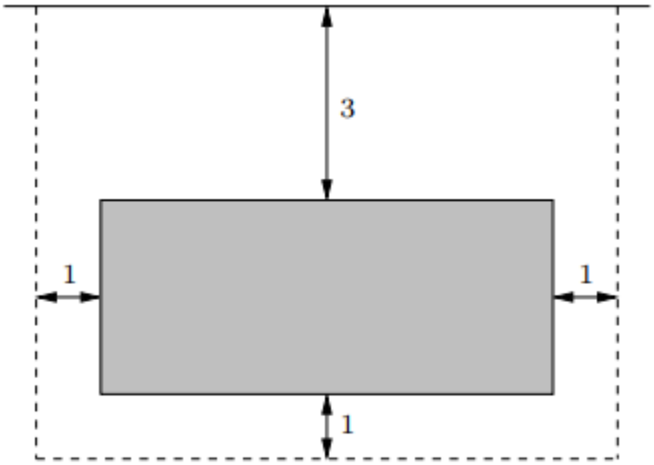
P2 2016

Considere todos os triângulos retângulos formados pelos semi-eixos positivos e por uma reta que passa pelo ponto $(1,2)$. Dentre todos esses triângulos, qual o tamanho da hipotenusa daquele que possui área mínima?

6. Problemas de Otimização

P2 2017

Deseja-se construir uma piscina retangular com $18m^2$ de área (da superfície) a $3m$ de distância de um muro. Paralela aos demais lados da piscina será construída uma cerca, deixando um corredor de circulação de $1m$ de largura.



Sabe-se que os lados da piscina paralelos ao muro devem ter no mínimo $2m$ e no máximo $6m$. Sejam a e A as áreas mínima e máxima que a região cercada pode ter. Qual o valor de $a + A$?

7. Assíntotas

P2 2017

A função $f(x) = \frac{ax^2+bx+4}{x+3}$ possui $y = 2x + 5$ como assíntota. Encontre os valores de a e b.

8. Construção de Gráficos

P2 2017

Esboce o gráfico da função $f(x) = \frac{x^3-1}{x^3+1}$ sabendo que $f'(x) = \frac{6x^2}{(x^3+1)^2}$ e $f''(x) = \frac{12x-24x^4}{(x^3+1)^3}$, determinando os intervalos de crescimento e decrescimento e de concavidade para cima e para baixo. Indique também as assíntotas, todos os pontos de máximo e mínimo locais e os pontos de inflexão, caso existam.

Gabarito

1. Existem 2 soluções reais.

2. Alternativa D.

3. $ab = e^2$

4. Alternativa D.

5. A hipotenusa mede $\sqrt{20}$.

6. Alternativa D.

7. $a = 2$ e $b = 11$

8.