www.estudar.com.vc

Cálculo I

Fuja do Nabo P2 2018.1 Parte 1

Resumo e Lista de Exercícios

Fórmulas e Resumo Teórico

1. Derivadas Exponenciais e Logarítmicas importantes

$(a^x)' = a^x \cdot \ln(a) \, , \forall \; a > 0$

$(e^x)' = e^x$

$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln\,(a)} \, , \forall \; a > 0$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

2. Regra de L'Hospital

Caso o limite

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

seja uma indeterminação do tipo "$0/0$" ou "$\pm\infty/\infty$", podemos escrever, pela Regra de L'Hospital, que:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Cuidado: *não confundir com a Regra do Quociente.*

3. Teorema do Valor Médio (TVM)

Seja uma função $f: [a, b] \to R$, contínua em todo o seu domínio. Suponhamos f derivável em $]a, b[$. O Teorema do Valor Médio (TVM) diz que, sob essas condições, existe (pelo menos um) $\boldsymbol{c} \in \boldsymbol{]a, b[}$ tal que:

$$f'(\boldsymbol{c}) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

O TVM é útil para provar desigualdades e analisar o crescimento de funções.

4. Teorema do Valor Intermediário (TVI)

Seja uma função $f : [a, b] \to R$, contínua em todo o seu domínio. Tomemos $\boldsymbol{\gamma} \in \boldsymbol{R}$ satisfazendo a seguinte desigualdade:

$$f(a) < \boldsymbol{\gamma} < f(b)$$

O Teorema do Valor Intermediário (TVI) diz que, sob tais condições, existe (pelo menos um) $\boldsymbol{c} \in [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ tal que:

$$f(\boldsymbol{c}) = \gamma$$

Isto é, existe pelo menos um $c \in [a, b]$ tal que:

$$f(a) < \boldsymbol{f}(\boldsymbol{c}) < f(b)$$

Consequência principal do TVI:

5. Teorema do Anulamento (de Bolzano)

Ainda considerando uma função $f : [a, b] \to R$, contínua em todo o seu domínio, sejam a e b tais que:

$$f(a) \cdot f(b) < 0$$

Sob essas condições, pode-se afirmar que existe (pelo menos um) $\boldsymbol{c} \in [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ tal que:

$$f(\boldsymbol{c}) = 0$$

6. Polinômio de Taylor

Polinômio de Taylor é o polinômio de grau n que **melhor aproxima uma função** ao redor de um ponto $x = a$ interior ao seu domínio. Sua definição é a seguinte:

$$P_{n,a}(x) = f(a) + f^{(1)}(a)(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

ou

$$P_{n,a}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x-a)^k$$

Nessa notação, $f^{(n)}(x)$ denota a derivada de ordem n da função $f(x)$. Além disso, note que n é o grau do Polinômio de Taylor correspondente.

Observações:

a. A função que o Polinômio de Taylor de ordem n pretende aproximar deve ser derivável até ordem n;
b. Quanto maior for a ordem do Polinômio de Taylor, maior será a precisão da aproximação.

7. Teorema de Taylor

Resto de Lagrange: é uma função $R(x)$ tal que:

$$R(x) = f(x) - P_{n,a}(x)$$

A função Resto de Lagrange indica a diferença entre a função f e o seu Polinômio de Taylor de ordem n.

Teorema de Taylor: Seja uma função $f: I \subset R \to R$, derivável até ordem $(n+1)$ e $x = a \in I$. O erro ϵ da aproximação da função $f(x)$ usando um Polinômio de Taylor de ordem n ao redor do ponto $x = a$ é tal que:

$$\boldsymbol{\epsilon = |R(x)| = |f(x) - P_{n,a}(x)|}$$

Além disso, pode-se demonstrar que:

$$\epsilon = \left| \frac{f^{(n+1)}(\boldsymbol{c})}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1} \right|$$

Nesse caso, o ponto $x = c$ é um ponto que está **entre $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{x}$**.

Exercícios

1. Derivadas Exponenciais e Logarítmicas

Elaboração Própria/P2 2016

Calcule as derivadas das seguintes funções:

a. $f(x) = e^{\sin x} \cdot \ln\left(e^{x^3}\right)$
b. $g(x) = (1 + \cos^2 x)^{e^x}$

2. Limites por *L'Hospital*

Lista 2/P2 2016/2017

Calcule, caso exista:

a. $\lim_{x \to 0} \frac{x \sin x + 2x^2}{e^x + e^{-x} - 2}$
b. $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{e^{2x}}$
c. $\lim_{x \to 0} (1 + \sin(3x))^{\frac{1}{\sin(2x)}}$
d. $\lim_{x \to \infty} x^{\sin\left(\frac{1}{2x}\right)}$

3. Teorema do Valor Médio (TVM)

P2 2014

Mostre que $\frac{\arctan x}{x} \leq 1$, para todo $x > 0$.

4. Teorema do Valor Médio (TVM)

P2 2016

Seja $n > 1$ um número natural. Aplicando o teorema do valor médio para $f(x) = \sqrt{x+1}$ no intervalo $n-1 \leq x \leq n$, mostre que

$$\frac{1}{2\sqrt{n+1}} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

5. Polinômio de Taylor

P2 2016

Usando Polinômio de Taylor da função $f(x) = \cos(x)$ em torno de $x_0 = 0$ de menor grau possível, obtenha uma aproximação de $\cos(0{,}1)$ com erro inferior a 10^{-5}.

6. Polinômio de Taylor

P2 2017

Prove que, para todo $x \geq 1$

$$\left|\arctan x - \frac{\pi}{4} - \frac{x-1}{2}\right| \leq \frac{(x-1)^2}{2}$$

Gabarito

1.

a. $f'(x) = e^{\sin x} \cdot \cos x \cdot \ln\left(e^{x^3}\right) + e^{\sin x} \cdot \frac{1}{e^{x^3}} \cdot e^{x^3} \cdot 3x^2$

b. $g'(x) = (1 + \cos^2 x)^{e^x} \left(e^x \cdot \ln(1 + \cos^2 x) - \frac{2e^x \cdot \sin x \cdot \cos x}{1 + \cos^2 x}\right)$

2.

a. 3

b. 0

c. $e^{\frac{3}{2}}$

d. 1

3. Demonstração.

4. Demonstração.

5. $\cos(0{,}1) \approx 1 - \frac{(0{,}1)^2}{2!}$

6. Demonstração.