www.estudar.com.vc

Cálculo II

Resumo Teórico Completo

www.estudar.com.vc

Cálculo 2

A disciplina visa estudar funções e gráficos, de forma semelhante a Cálculo 1, mas expande o estudo para funções de mais de uma variável, bem como gráficos em três dimensões. Consequentemente, conceitos vistos em Cálculo 1 e Álgebra Linear 1 são aplicados em Cálculo 2, com novas aplicações.

Cônicas

Conceito:

Cônicas são formas desenhadas em duas dimensões, considerando apenas os eixos x (horizontal) e y (vertical).

Tipos de Cônica:

1. Retas:

   Equação reduzida:

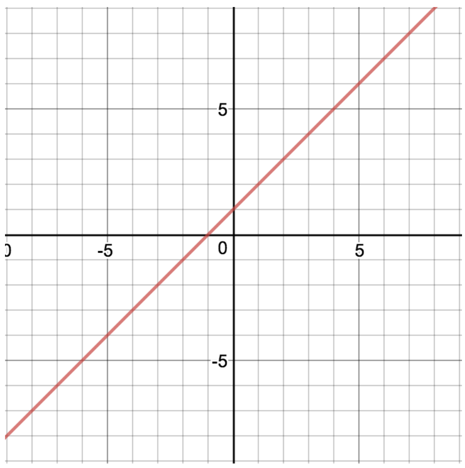
   $$y = ax + b$$

   a = Coeficiente angular da reta

   $$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan \theta$$

   b = Coeficiente linear da reta → valor de y quando $x = 0$.

   Representação geométrica:



2. Circunferências:

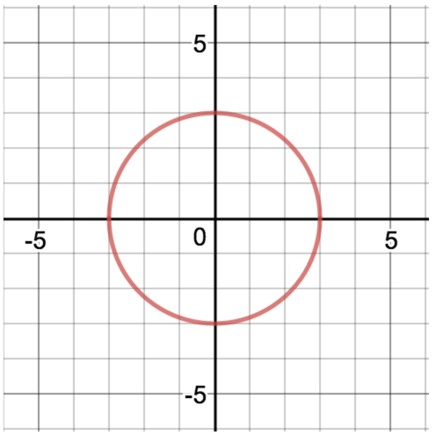
Equação reduzida:

$$(y - y_c)^2 + (x - x_c)^2 = r^2$$

(x_c, y_c) = Centro da Circunferência

r = Raio da Circunferência

Representação geométrica:



3. Parábolas:

Equação Reduzida:

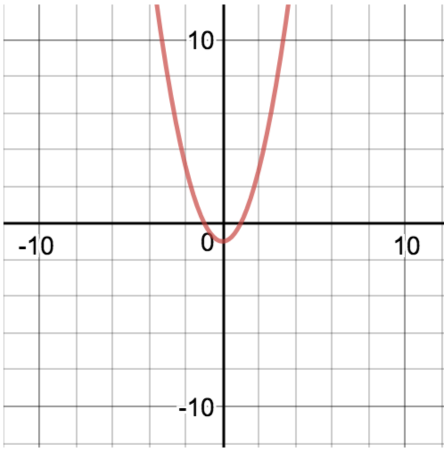
$$y = ax^2 + bx + c$$

a = Indica concavidade da parábola → se $a > 0$, concavidade para cima, e se $a < 0$, concavidade para baixo.

c = Valor de y quando $x = 0$.

Vértice: $x_v = -\frac{b}{2a}, y_v = -\frac{\Delta}{4a}, \Delta = b^2 - 4ac$

Representação geométrica:



4. Elipses:

Equação Reduzida:

$$\frac{(x-x_c)^2}{a^2}+\frac{(y-y_c)^2}{b^2}=1$$

Ou:

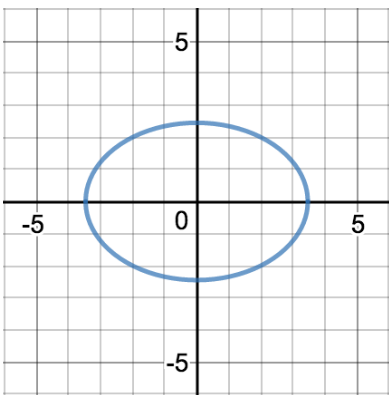
$$\frac{(y-y_c)^2}{a^2}+\frac{(x-x_c)^2}{b^2}=1$$

a = Raio maior da elipse, na direção do eixo cuja variável é numeradora sobre a

b = Raio menor da elipse, na direção do eixo cuja variável é numeradora sobre b

(x_c, y_c) = Centro da Elipse

Representação geométrica:



5. Hipérboles:

Equação Reduzida:

$$\frac{(x-x_c)^2}{a^2}-\frac{(y-y_c)^2}{b^2}=1$$

Ou:

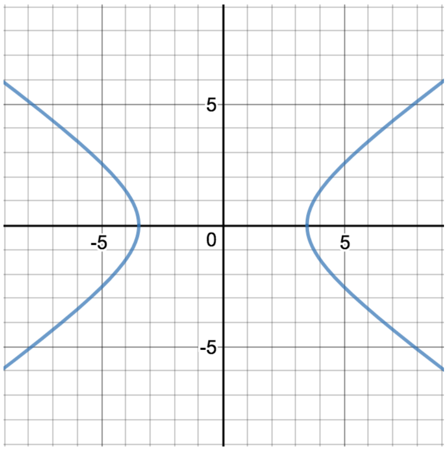
$$\frac{(y-y_c)^2}{a^2}-\frac{(x-x_c)^2}{b^2}=1$$

a = Distância entre o centro da hipérbole e o começo da figura, na direção do eixo cuja variável é numeradora sobre a

b = Distância que o eixo cuja variável é numeradora sobre b varia conforme o outro eixo varia uma unidade.

(x_c, y_c) = Centro da Hipérbole

Representação geométrica:



Funções de Duas Variáveis

$$z=f(x,y)$$

Definida em $\mathbb{R}^2$, apenas um valor de z para cada par (x, y).

Domínio de Função de Duas Variáveis:

Valores que podem ser colocados nas variáveis controladas, exceto as restrições.

Domínio máximo: $\mathbb{R}^2$

Restrições no Domínio:

1. Raízes → $Termo \geq 0$
2. Denominadores → $Termo \neq 0$
3. Denominadores em raízes → $Termo > 0$
4. Logaritmos → $Termo > 0$

Gráfico do Domínio:

Hachurar região dentro do domínio, tracejar fronteira não permitida.

Curva de Nível:

A curva de nível k é tal que:

$$f(x, y) = k$$

Para cada k diferente, há uma equação de duas variáveis diferente → Gráfico em 2D diferente.

Curvas

Definição algébrica:

A curva parametriza uma função de duas ou mais variáveis em uma região com menos variáveis.

$$\gamma = \big(x(t), y(t)\big)$$

Onde $x = x(t)$ e $y = y(t)$

Respeitando:

$$y = f(x)$$

Parametrização:

Trocar variáveis por um parâmetro comum, mantendo a relação entre elas.

Exemplo comum:

$$y = x$$

Parametrizando, temos:

$$x = t \Rightarrow y = t$$

$$\gamma = (t, t)$$

$$t \in \mathbb{R}$$

<u>Parametrização por Coordenadas Polares</u>:

Provocar o aparecimento de $\sin t$ e $\cos t$, quando variáveis tiverem grau 2.

Exemplo comum:

$$x^2 + y^2 = 1$$

Parametrizando:

$$x = \cos t$$

$$y = \sin t$$

$$\gamma = (\cos t\,, \sin t)$$

$$0 \leq t < 2\pi$$

<u>Curva por Interseção de Superfícies</u>:

Isolar uma variável e substituir na outra equação, parametrizando com duas variáveis em vez de três.

Exemplo:

$$S_1 \rightarrow x + y + z = 1$$

$$S_2 \rightarrow x + y - z = 0$$

$$z = x + y$$

$$\text{Em } S_1 \colon 2x + 2y = 1$$

Parametrizando:

$$x = t \to y = \frac{1-2t}{2}$$

$$z = \frac{1}{2}$$

$$\gamma = \left(t, \frac{1-2t}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Derivada de curva:

$$\gamma' = \big(x'(t), y'(t)\big)$$

Ou:

$$\frac{d\gamma}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}(t), \frac{dy}{dt}(t)\right)$$

Vetor Tangente a uma Curva:

O vetor tangente a uma curva no ponto (x_0, y_0) é qualquer múltiplo da derivada da curva, no ponto em questão:

$$\vec{v} = \lambda\gamma' = \lambda\left(x'(t_0), y'(t_0)\right)$$

$$x_0 = x(t_0), y_0 = y(t_0)$$

Reta Tangente a uma Curva:

A reta tangente a uma curva no ponto (x_0, y_0) é a soma de um ponto que pertence a reta com qualquer múltiplo da derivada da curva, no ponto em questão:

$$r: P + \lambda\gamma'$$

$$r: (x, y) = (x_P, y_P) + \lambda\big(x'(t_0), y'(t_0)\big)$$

Quádricas

Quádricas são formas em três dimensões (ou seja, considerando os eixos x, y e z.

Tipos de Quádricas:

1. Elipsoides:

   Equação Reduzida:

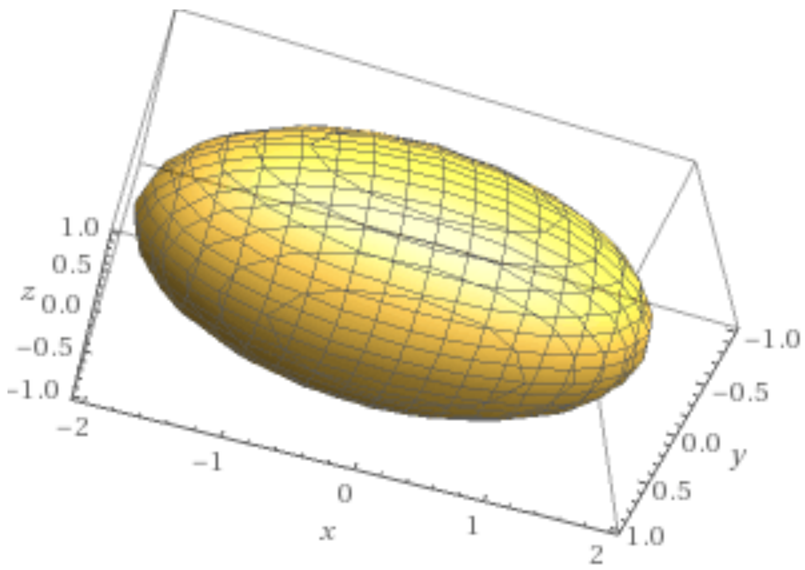
$$\frac{(x-x_c)^2}{a^2}+\frac{(y-y_c)^2}{b^2}+\frac{(z-z_c)^2}{c^2}=1$$

   a, b, c = Raios do elipsoide na direção do eixo cuja variável é numeradora ao raio em questão.

   (x_c, y_c, z_c) = Centro do Elipsoide

   Todos os sinais positivos, 1 na direita, 3 variáveis ao quadrado

   Representação geométrica:



2. <u>Hiperboloides de uma Folha:</u>

Equação Reduzida:

$$\frac{(x-x_c)^2}{a^2}+\frac{(y-y_c)^2}{b^2}-\frac{(z-z_c)^2}{c^2}=1$$

Ou:

$$\frac{(x-x_c)^2}{a^2}-\frac{(y-y_c)^2}{b^2}+\frac{(z-z_c)^2}{c^2}=1$$

Ou:

$$-\frac{(x-x_c)^2}{a^2}+\frac{(y-y_c)^2}{b^2}+\frac{(z-z_c)^2}{c^2}=1$$

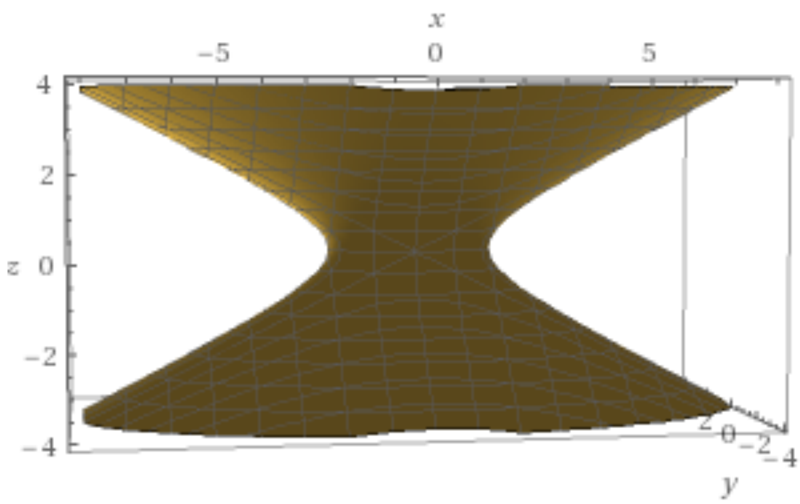
b, c = Raios das elipses (curvas de nível)

a = Distância característica às hipérboles (curvas de nível)

(x_c, y_c, z_c) = Centro do Hiperboloide

Um sinal negativo, 1 na direita, 3 variáveis ao quadrado

Representação geométrica:



3. Hiperboloides de Duas Folhas:

Equação Reduzida:

$$\frac{(x-x_c)^2}{a^2}-\frac{(y-y_c)^2}{b^2}-\frac{(z-z_c)^2}{c^2}=1$$

Ou:

$$-\frac{(x-x_c)^2}{a^2}-\frac{(y-y_c)^2}{b^2}+\frac{(z-z_c)^2}{c^2}=1$$

Ou:

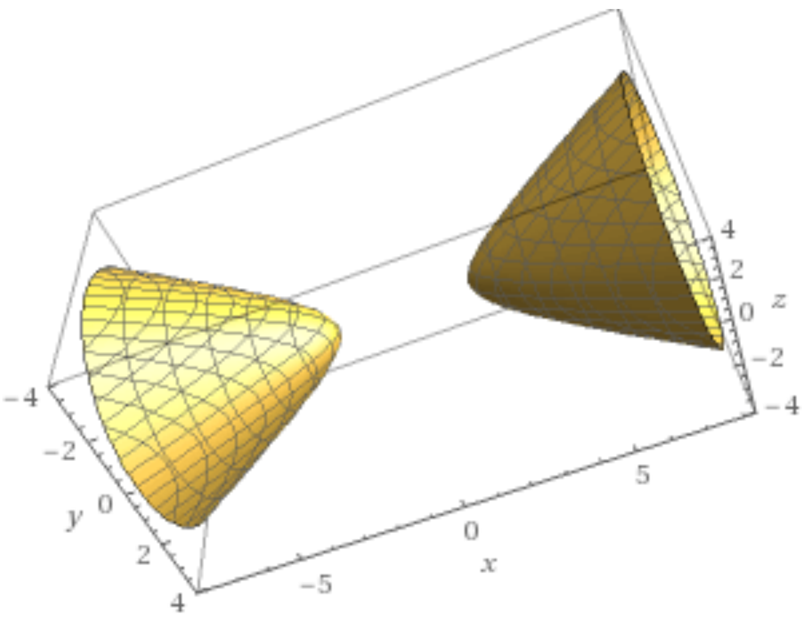
$$-\frac{(x-x_c)^2}{a^2}+\frac{(y-y_c)^2}{b^2}-\frac{(z-z_c)^2}{c^2}=1$$

a, b, c = Distâncias características ao hiperboloide

(x_c, y_c, z_c) = Centro do Hiperboloide

Dois sinais negativos, 1 na direita, 3 variáveis ao quadrado

Representação geométrica:



4. <u>Paraboloides Elípticos:</u>

Equação Reduzida:

$$\frac{(x-x_c)^2}{a^2}+\frac{(y-y_c)^2}{b^2}=cz$$

Ou:

$$\frac{(y-y_c)^2}{a^2}+\frac{(z-z_c)^2}{b^2}=cx$$

Ou:

$$\frac{(x-x_c)^2}{a^2}+\frac{(z-z_c)^2}{b^2}=cy$$

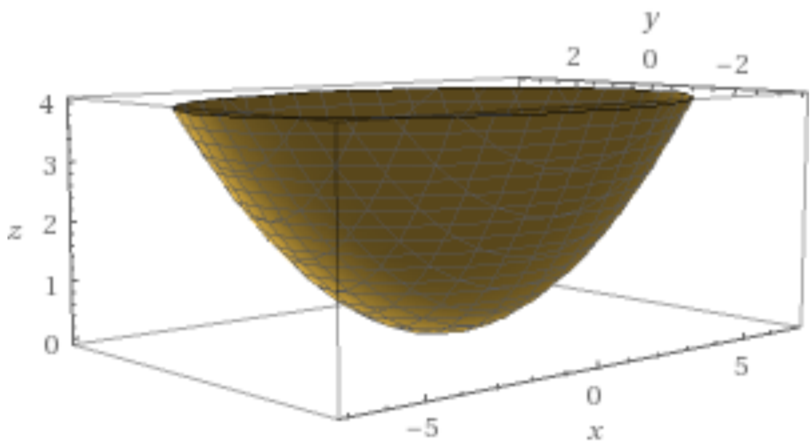
a, b = Raios das curvas de nível (elipses)

c = Multiplicador da variável de grau 1

(x_c, y_c) = Centro do Paraboloide

Sinais positivos, variável de grau 1 na direita, 2 variáveis ao quadrado na esquerda

Representação geométrica:



5. <u>Paraboloides Hiperbólicos (Sela):</u>

Equação Reduzida:

$$\frac{(x - x_c)^2}{a^2} - \frac{(y - y_c)^2}{b^2} = cz$$

Ou:

$$\frac{(y - y_c)^2}{a^2} - \frac{(z - z_c)^2}{b^2} = cx$$

Ou:

$$\frac{(x - x_c)^2}{a^2} - \frac{(z - z_c)^2}{b^2} = cy$$

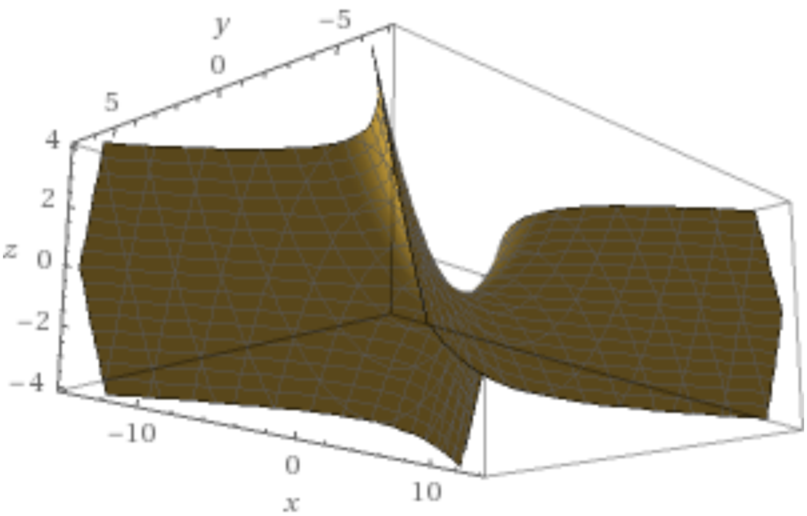
a, b = Distância relativas às curvas de nível (hipérboles)

c = Multiplicador da variável de grau 1

(x_c, y_c) = Centro do Paraboloide

Sinal negativo, variável de grau 1 na direita, 2 variáveis ao quadrado na esquerda

Representação geométrica:



6. Cones:

Equação Reduzida:

$$\frac{(x-x_c)^2}{a^2}+\frac{(y-y_c)^2}{b^2}-\frac{(z-z_c)^2}{c^2}=0$$

Ou:

$$\frac{(x-x_c)^2}{a^2}-\frac{(y-y_c)^2}{b^2}+\frac{(z-z_c)^2}{c^2}=0$$

Ou:

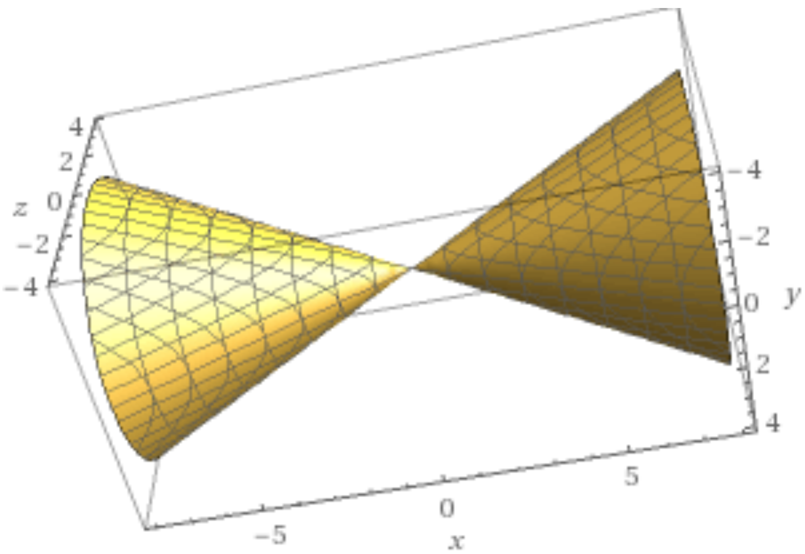
$$-\frac{(x-x_c)^2}{a^2}+\frac{(y-y_c)^2}{b^2}+\frac{(z-z_c)^2}{c^2}=0$$

Variável negativa: eixo do cone

(x_c, y_c, z_c) = Centro do Cone

Sinal negativo, 0 na direita, variáveis de grau 2

Representação geométrica:



Limites e Continuidade para Funções de Duas Variáveis

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$$

Limite representa para quanto tende o valor da função $f(x,y)$, quando o par (x,y) tende para um (x_0,y_0).

<u>Limite Fundamental</u>:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x+y)}{x+y} = 1$$

<u>Continuidade</u>:

Se a função é contínua e definida no ponto (a,b), então:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

<u>Métodos de Resolução de Limites:</u>

1. <u>Aproximação por Diferentes Curvas</u>:

   Prova que limite não existe ou vale um resultado diferente do esperado:

   Se $\lim_{t\to t_0} f\big(\gamma_0(t)\big) \neq \lim_{t\to t_1} f\big(\gamma_1(t)\big)$, não existe limite.

   Ou seja, podemos utilizar algumas curvas e substituir x e y na função, calculando o limite; se os valores dos limites forem diferentes, com curvas diferentes, o limite não existe.

Curvas mais utilizadas:

$$\text{Eixo } x: \gamma(t) = (t, 0)$$
$$\text{Eixo } y: \gamma(t) = (0, y)$$
$$\text{Reta } y = x: \gamma(t) = (t, t)$$

Observar graus das variáveis → se existe proporção, utilizar curva com a proporção oposta.

Exemplo:

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y}{x^4 + y^2}$$

Proporção dos graus: 2 para 1

Curva sugerida: $\gamma(t) = (t, t^2)$

2. <u>Teorema do Confronto</u>:

Prova que limite vale 0:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x, y)}{g(x, y)} h(x, y) = 0$$

Quando:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} h(x, y) = 0$$

E:

$$\frac{f(x,y)}{g(x,y)} \text{ é limitada}$$

Para provar que a divisão de $f(x, y)$ por $g(x, y)$ é limitada, precisamos provar que o numerador é menor do que o denominador, e maior ou igual a zero:

$$0 \leq f(x,y) \leq g(x,y)$$

Portanto:

$$0 \leq \frac{f(x,y)}{g(x,y)} \leq 1$$

3. Curvas de Nível:

   Prova que limite não existe:

$$\text{Se } f\big(\gamma_1(t)\big) = k_1, f\big(\gamma_2(t)\big) = k_2, \text{e } k_1 \neq k_2$$

$$\lim_{t \to t_1} f\big(\gamma_1(t)\big) = k_1 \neq k_2 = \lim_{t \to t_2} f\big(\gamma_t(t)\big)$$

   Se os limites de curvas que geram diferentes curvas de nível são diferentes (ou seja, se um mesmo ponto é capaz de gerar diferentes curvas de nível), não existe limite.

Derivadas Parciais

Para calcular a derivada parcial em x, deve-se manter as outras variáveis fixas (constantes), de forma que se comportem como números. Mesma lógica para derivar em y ou em qualquer variável.

Derivada parcial em x (lê-se del f, del x):

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = f_x(x,y)$$

Derivada parcial em y (lê-se del f, del y):

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = y(x,y)$$

Exemplo:

$$f(x,y) = x^2 + y$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2x \text{ e } \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 1$$

Interpretação:

A derivada parcial é a inclinação da reta tangente ao ponto, com uma variável variando e as outras fixas. Pode ser interpretada também como a tendência a variar o resultado de $f(x,y)$, quando uma variável varia uma unidade e a outra permanece fixa.

Derivada em Pontos não Definidos:

Nos pontos (x_0, y_0) nos quais a derivada não é definida (ou contínua), a derivada parcial é tal que:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

Derivada de Segunda Ordem:

Para derivadas não nulas, é possível calcular a segunda derivada, ou seja, as derivadas parciais das derivadas.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = f_{xx}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = f_{yy}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = f_{yx}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = f_{xy}$$

Diferenciabilidade

Uma função é diferenciável se o plano tangente a um ponto (x_0, y_0) aproxima suficientemente bem o valor de $f(x, y)$.

<u>Condições básicas de uma função diferenciável:</u>

Toda função diferenciável em (x_0, y_0):

1. É definida no ponto (x_0, y_0);
2. É contínua no ponto (x_0, y_0);
3. Possui as derivadas parciais $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ e $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$;
4. Possui as derivadas parciais no ponto (x_0, y_0).

Toda função diferenciável em segunda ordem em (x_0, y_0):

1. É definida no ponto (x_0, y_0);
2. É contínua no ponto (x_0, y_0);
3. Possui as derivadas parciais $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ e $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ gerais e no ponto (x_0, y_0);
4. As derivadas são contínuas no ponto (x_0, y_0).
5. Existem as derivadas de segunda ordem gerais e no ponto (x_0, y_0)
6. A igualdade $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ se verifica.

De todas as condições acima, *a 6 é a mais importante*.

Representação:

Se f é diferenciável, ela é de classe C^1

Se f é diferenciável em segunda ordem, ela é de classe C^2

Se f é diferenciável em qualquer ordem, ela é de classe C^n

Passos para identificar diferenciabilidade de $f(x, y)$ em (x_0, y_0):

1. Verificar se a função é definida e contínua em (x_0, y_0);
2. Calcular as derivadas parciais $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ e $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$;
3. Calcular as derivadas parciais no ponto (x_0, y_0), ou seja, $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}$ e $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}$;
4. Ver se as derivadas são contínuas no ponto (x_0, y_0).

Se a condição se verifica, a função é diferenciável no ponto. Senão, fazer passo 5:

5. Calcular o limite de diferenciabilidade abaixo:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - [f(x_0,y_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} * (x - x_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} * (y - y_0)]}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}$$

Onde $f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} * (x - x_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} * (y - y_0)$ é a equação do plano tangente.

Se o limite do passo 5 for igual a 0, a função é diferenciável. Senão, ela não é diferenciável no ponto em questão.

Vetor Gradiente

Derivada Direcional:

A derivada é a inclinação da reta tangente a um ponto. Mas a derivada direcional é a inclinação da reta que tem direção de um vetor unitário $\vec{u}$.

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = a * \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} + b * \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$$

Onde:

$$\vec{u} = < a, b >$$

$$||\vec{u}|| = \sqrt{a^2 + b^2} = 1$$

Derivada Direcional em Versores Definidos por Ângulos:

Os versores (vetores de norma 1) $\vec{u}$ podem ser indicados por um ângulo θ:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = \cos\theta * \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} + \sin\theta * \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$$

Onde:

$$\vec{u} = < \cos\theta, \sin\theta >$$

$$||\vec{u}|| = \sqrt{(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2} = 1$$

Vetor Gradiente:

O vetor gradiente é composto pelas derivadas parciais, nas coordenadas relativas às variáveis em que são calculadas as derivadas.
O gradiente de f (lê-se grad f ou del f) é:

$$\overrightarrow{\nabla f}(x, y) = \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right)$$

<u>Posição Relativa entre Gradiente e Reta Tangente:</u>

O gradiente é um vetor ortogonal a qualquer vetor ou reta tangente ao gráfico em questão, no ponto (x_0, y_0) em que ocorre a tangência e onde está definido o gradiente. Assim:

$$\overrightarrow{\nabla f}(x_0, y_0) \perp \overrightarrow{\gamma'}(t_0)$$

Portanto, o produto escalar entre o gradiente e o vetor tangente é nulo:

$$\overrightarrow{\nabla f}(x_0, y_0) \cdot \overrightarrow{\gamma'}(t_0) = 0$$

Lembrando que o produto escalar entre dois vetores é:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (x_a, y_a) \cdot (x_b, y_b) = x_a x_b + y_a y_b$$

<u>Equação da Derivada Direcional utilizando Gradiente:</u>

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = \overrightarrow{\nabla f}(x_0, y_0) \cdot \vec{u}$$

<u>Valor Máximo da Derivada Direcional:</u>

A derivada direcional atinge valor máximo quando o vetor $\vec{u}$ tem a direção do vetor gradiente $\overrightarrow{\nabla f}$, ou seja, quando:

$$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{\nabla f}}{\overrightarrow{|\nabla f|}}$$

A *taxa máxima de variação* (valor máximo da derivada direcional) é:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}} max(x_0, y_0) = \overrightarrow{|\nabla f|}(x_0, y_0)$$

Regra da Cadeia

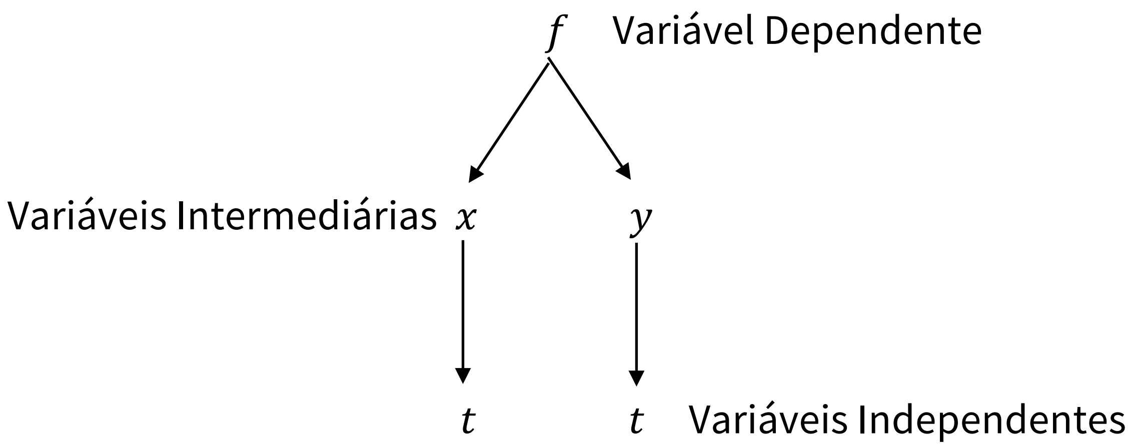
A regra da cadeia para funções de duas ou mais variáveis ocorre quando se quer derivar a função em relação a uma variável que não é a variável imediatamente dependente de f.

<u>Variáveis Dependentes, Intermediárias e Independentes:</u>

As variáveis dependentes são as que dependem de todas as outras, as intermediárias dependem de algumas e as independentes são as controladas, que não dependem de nenhuma.

Se tenho:

$$f(x, y), x = x(t) \text{ e } y = y(t)$$



<u>Regra da Cadeia para Uma Variável Independente:</u>

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} * \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} * \frac{dy}{dt}$$

<u>Regra da Cadeia para Duas Variáveis Independentes:</u>

Se tivermos:

$$f(x, y), x = x(t, u), y = y(t, u)$$

A regra da cadeia será:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} * \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} * \frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} * \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} * \frac{\partial y}{\partial u}$$

<u>Versão Geral da Regra da Cadeia:</u>

Se tivermos:

$$f(x, y, z, w), x = x(t, u), y = y(t, u), z = z(t, u), w = w(t, u)$$

Com n variáveis intermediárias e independentes. A regra da cadeia será:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} * \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} * \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z} * \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial w} * \frac{\partial w}{\partial t}$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} * \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} * \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z} * \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial w} * \frac{\partial w}{\partial u}$$

Ou seja, deve-se somar as derivadas da variável dependente pelas variáveis intermediárias, e multiplicar as derivada anteriores pelas derivadas das variáveis intermediárias pela variável independente em questão.

<u>Diferenciação Implícita:</u>

Podemos definir implicitamente uma função $z = f(x, y)$ dada como uma equação de três variáveis, de forma que uma função $F(x, y, z)$ seja a definição implícita.

Exemplo:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

Assim, as *derivadas implícitas* são:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

Plano Tangente

<u>Equação do Plano Tangente:</u>

$$z = z_0 + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} * (x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} * (y - y_0)$$

Onde (x_0, y_0, z_0) é o ponto onde o plano tangencia a função $z = f(x, y)$.

É essencial conhecer o gradiente $\nabla f(x_0, y_0)$, ou seja, as derivadas parciais da função $f(x, y)$, para que a equação do plano seja obtida.

Funções de Três Variáveis

$$w = f(x, y, z)$$

Definida em $\mathbb{R}^3$, apenas um valor de w para cada (x, y, z).

Domínio de Função de Três Variáveis:

Valores que podem ser colocados nas variáveis controladas, exceto as restrições.

Domínio máximo: $\mathbb{R}^3$

Superfície de Nível:

A superfície de nível k é tal que:

$$f(x, y, z) = k$$

Para cada k diferente, há uma equação de três variáveis diferente → Gráfico em 3D diferente.

Vetor Gradiente:

O gradiente de f (lê-se grad f ou del f) é:

$$\overrightarrow{\nabla f}(x, y, z) = \left(\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x}, \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y}, \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z}\right)$$

Posição Relativa entre Gradiente e Reta Tangente:

O gradiente é um vetor ortogonal a qualquer vetor ou reta tangente ao gráfico em questão, no ponto (x_0, y_0, z_0) em que ocorre a tangência e onde está definido o gradiente. Assim:

$$\overrightarrow{\nabla f}(x_0, y_0, z_0) \perp \overrightarrow{\gamma'}(t_0)$$

Portanto, o produto escalar entre o gradiente e o vetor tangente é nulo:

$$\overrightarrow{\nabla f}(x_0, y_0, z_0) \cdot \overrightarrow{\gamma'}(t_0) = 0$$

Equação da Derivada Direcional utilizando Gradiente:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0, z_0) = \overrightarrow{\nabla f}(x_0, y_0, z_0) \cdot \vec{u}$$

$$\vec{u} = < a, b, c >$$

Equação do Plano Tangente:

$$\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x} * (x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial y} * (y - y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial z} * (z - z_0) = 0$$

Onde (x_0, y_0, z_0) é o ponto onde o plano tangencia a função $z = f(x, y)$.

Reta Tangente por Interseção de Superfícies:

Como a reta tangente é perpendicular ao gradiente, a reta tangente à curva dada pela interseção de duas superfícies será perpendicular tanto ao gradiente da função que origina a primeira superfície, quanto ao gradiente da função que origina a segunda superfície.

A reta tangente é:

$$r: P + \lambda \vec{v}$$

Onde $\vec{v}$ é um múltiplo do vetor tangente à curva.

A relação entre $\vec{v}$ e os gradientes é:

$$\overrightarrow{\nabla f}(x_0, y_0, z_0) \perp \vec{v} \text{ e } \overrightarrow{\nabla g}(x_0, y_0, z_0) \perp \vec{v}$$

Portanto, podemos obter $\vec{v}$ pelo produto vetorial entre os gradientes:

$$\vec{v} = \overrightarrow{\nabla f}(x_0, y_0, z_0) \times \overrightarrow{\nabla g}(x_0, y_0, z_0)$$

Pontos Críticos, Máximos e Mínimos

Pontos Críticos:

São os pontos nos quais os valores das derivadas parciais são iguais a zero. Por meio deles, é possível estudar a mudança de direção da função, e, consequentemente, máximos e mínimos. Se o ponto crítico é um (x_0, y_0, z_0):

$$f_x(x_0, y_0, z_0) = 0,\ f_y(x_0, y_0, z_0) = 0 \text{ e } f_z(x_0, y_0, z_0) = 0$$

Ou seja, deve-se derivar a função e igualar a 0 para descobrir os pontos críticos.

Valores Extremos:

Valores extremos são os pontos de máximo e mínimo do gráfico, no gráfico como um todo ou em uma região específica.

Máximos Absolutos:

São os pontos (x_0, y_0, z_0) cujo valor de $f(x_0, y_0, z_0)$ é o maior possível, em toda a extensão do gráfico da função f:

Se (x_0, y_0, z_0) é ponto de máximo:

$$f(x_0, y_0, z_0) > f(x, y, z), \text{ para } (x, y, z) \neq (x_0, y_0, z_0)$$

Mínimos Absolutos:

São os pontos (x_0, y_0, z_0) cujo valor de $f(x_0, y_0, z_0)$ é o menor possível, em toda a extensão do gráfico da função f:

Se (x_0, y_0, z_0) é ponto de mínimo:

$$f(x_0, y_0, z_0) < f(x, y, z), \text{ para } (x, y, z) \neq (x_0, y_0, z_0)$$

Máximos Locais:

São os pontos (x_0, y_0, z_0) cujo valor de $f(x_0, y_0, z_0)$ é o maior possível, dentro de uma região limitada que contenha o ponto; todavia, em toda a extensão do gráfico da função f, há pontos cujo valor de $f(x, y, z)$ são maiores que $f(x_0, y_0, z_0)$.

Se (x_0, y_0, z_0) é ponto de máximo local:

$$f(x_0, y_0, z_0) > f(x, y, z), \text{ dentro de uma região limitada do gráfico}$$

$$\text{Mas } f(x, y, z) > f(x_0, y_0, z_0), \text{ para algum } (x, y, z) \neq (x_0, y_0, z_0)$$

Mínimos Locais:

São os pontos (x_0, y_0, z_0) cujo valor de $f(x_0, y_0, z_0)$ é o menor possível, dentro de uma região limitada que contenha o ponto; todavia, em toda a extensão do gráfico da função f, há pontos cujo valor de $f(x, y, z)$ são menores que $f(x_0, y_0, z_0)$.

Se (x_0, y_0, z_0) é ponto de mínimo local:

$$f(x_0, y_0, z_0) < f(x, y, z), \text{ dentro de uma região limitada do gráfico}$$

$$\text{Mas } f(x, y, z) < f(x_0, y_0, z_0), \text{ para algum } (x, y, z) \neq (x_0, y_0, z_0)$$

Ponto de Sela:

O ponto de sela é um ponto crítico cujo valor da função, calculada nele, não é máximo nem mínimo; ou seja, é um ponto crítico que não gera valor extremo.

Hessiano de uma Função de Duas Variáveis:

O Hessiano (ou função Hessiana) pode ser calculado pelo seguinte determinante:

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}$$

$$H(x, y) = f_{xx} * f_{yy} - f_{xy} * f_{yx}$$

Teste da Segunda Derivada:

Para descobrir se um ponto crítico (x_0, y_0, z_0) é ponto de máximo local, mínimo local ou ponto de sela, aplicamos o teste da segunda derivada:

1. Calcula-se o Hessiano da função no ponto crítico, ou seja:

$$H(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0) * f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}(x_0, y_0) * f_{yx}(x_0, y_0)$$

2. Observar o sinal do Hessiano:
   a. Se $H(x_0, y_0) < 0$, o ponto crítico é ponto de sela
   b. Se $H(x_0, y_0) = 0$, o Hessiano é inconclusivo e é necessário analisar os valores da função nas redondezas, para descobrir se existem valores maiores ou menores;
   c. Se $H(x_0, y_0) > 0$, o ponto crítico gera um valor extremo e deve-se proceder para o passo 3.

3. Analisar o valor da segunda derivada f_{xx}, caso $H(x_0, y_0) > 0$:
   a. Se $f_{xx} > 0$, o ponto é mínimo local;
   b. Se $f_{xx} < 0$, o ponto é máximo local.

Máximos e Mínimos em Conjuntos Compactos

Conjuntos Compactos:

Um conjunto é compacto quando ele é, simultaneamente:

1. Limitado → não vai até o infinito, e consigo criar uma circunferência (para conjuntos 2D) ou uma bola (para conjuntos 3D) de forma que o conjunto esteja inteiramente dentro da circunferência/bola;

2. Fechado → a fronteira do conjunto, ou seja, a borda, faz parte do conjunto. Um conjunto aberto contém apenas o interior; um conjunto fechado contém interior e fronteira.

Em geral:

Um conjunto $g(x, y, z) < k$ é composto pelo interior

Um conjunto $g(x, y, z) = k$ é composto pela fronteira

Um conjunto $g(x,y,z) \leq k$ é composto por fronteira e interior

Teorema de Weierstrass

"*Se tenho uma função contínua e um conjunto compacto, a função com certeza possui pontos de mínimo absoluto e pontos de máximo absoluto sobre o conjunto compacto*".

Ou seja, para garantir que existem pontos de mínimo e máximo de uma $f(x,y,z)$ sobre um conjunto C:

1. A função f deve ser contínua em todos os pontos;

2. E o conjunto C deve ser compacto, ou seja, limitado e fechado.

Se as condições acima não são verificadas, nada pode se dizer sobre a existência de valores extremos em C.

Passos para Identificar Máximos e Mínimos sobre Conjuntos Compactos

Caso o conjunto compacto C inclua tanto a fronteira quanto seu interior, devemos:

1. Interior: Determinar o valor de $f(a,b)$, onde (a,b) é ponto crítico de f que está dentro do conjunto C. Registrar os valores calculados;

2. Fronteira: Determinar os valores extremos de f na fronteira de C, registrando o maior e o menor valor e o ponto correspondente;

3. Elencar os valores calculados na etapa 1 e 2, de forma que o maior é o máximo absoluto e o menor é o mínimo absoluto.

Caso o conjunto compacto C inclua somente a fronteira, devemos:

1. Fronteira: Determinar os valores extremos de f na fronteira de C, registrando o maior e o menor valor e o ponto correspondente;

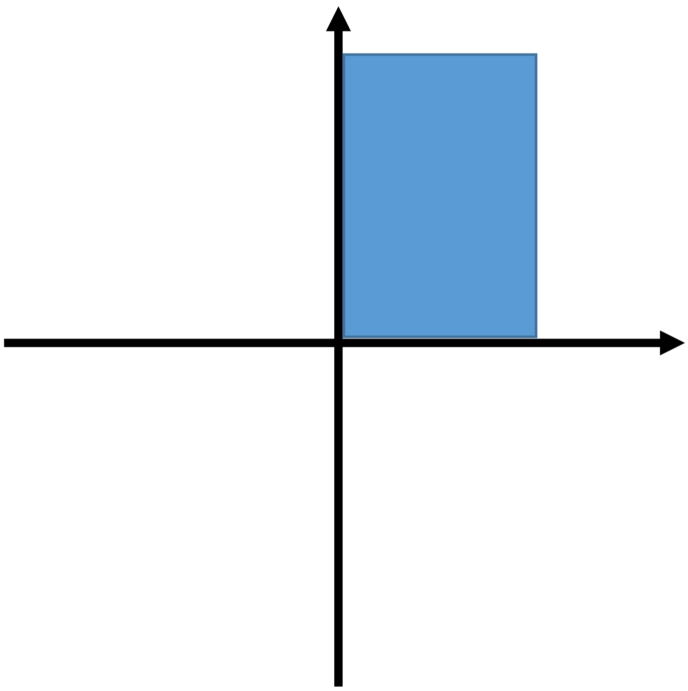
2. Elencar os valores calculados na etapa 1 e 2, de forma que o maior é o máximo absoluto e o menor é o mínimo absoluto.

Fronteira Parametrizável:

Em alguns casos, a fronteira do conjunto C em questão pode ser parametrizada, para que seja possível achar os maiores e menores valores de f na região.

Exemplo:

$$C: \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 2 \; e \; 0 \leq y \leq 3\}$$



a. Região inferior: $0 \leq x \leq 2 \; e \; y = 0$
b. Região superior: $0 \leq x \leq 2 \; e \; y = 3$
c. Região esquerda: $x = 0 \; e \; 0 \leq y \leq 3$
d. Região direita: $x = 2 \; e \; 0 \leq y \leq 3$

Multiplicador de Lagrange:

O multiplicador de Lagrange é um número real que indica que, em pontos de valor extremo sobre conjuntos compactos, o gradiente da função pode ser obtido através de múltiplos dos gradientes das funções que geram as restrições.

Neste caso, os vetores gradientes são L.D. (Linearmente Dependentes).

Método dos Multiplicadores de Lagrange para Uma Restrição:

Para estudar os candidatos a mínimos ou máximos na fronteira de um conjunto, podemos utilizar o método dos multiplicadores de Lagrange.

Se o conjunto C possui apenas uma restrição, os candidatos (x_0, y_0) a ponto máximo e mínimo de $f(x, y)$ na fronteira do conjunto são:

$$\begin{cases} \overrightarrow{\nabla f}(x_0, y_0) = \lambda * \overrightarrow{\nabla g}(x_0, y_0) \\ g(x_0, y_0) = k \end{cases}$$

Ou:

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} f_x(x_0, y_0) & f_y(x_0, y_0) \\ g_x(x_0, y_0) & g_y(x_0, y_0) \end{vmatrix} = 0 \\ g(x_0, y_0) = k \end{cases}$$

Se o conjunto C possui apenas uma restrição, os candidatos (x_0, y_0, z_0) a ponto máximo e mínimo de $f(x, y, z)$ na fronteira do conjunto são:

$$\begin{cases} \overrightarrow{\nabla f}(x_0, y_0, z_0) = \lambda * \overrightarrow{\nabla g}(x_0, y_0, z_0) \\ g(x_0, y_0, z_0) = k \end{cases}$$

Ou:

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ f_x(x_0, y_0, z_0) & f_y(x_0, y_0, z_0) & f_z(x_0, y_0, z_0) \\ g_x(x_0, y_0, z_0) & g_y(x_0, y_0, z_0) & g_z(x_0, y_0, z_0) \end{vmatrix} = 0 \\ g(x_0, y_0, z_0) = k \end{cases}$$

<u>Método dos Multiplicadores de Lagrange para Duas Restrições:</u>

Se o conjunto C possui duas restrições, os candidatos (x_0, y_0, z_0) a ponto máximo e mínimo de $f(x, y, z)$ na fronteira do conjunto são:

$$\begin{cases} \overrightarrow{\nabla f}(x_0, y_0, z_0) = \lambda * \overrightarrow{\nabla g}(x_0, y_0, z_0) + \mu * \overrightarrow{\nabla h}(x_0, y_0, z_0) \\ g(x_0, y_0, z_0) = k \\ h(x_0, y_0, z_0) = k \end{cases}$$

Ou:

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} f_x(x_0, y_0, z_0) & f_y(x_0, y_0, z_0) & f_z(x_0, y_0, z_0) \\ g_x(x_0, y_0, z_0) & g_y(x_0, y_0, z_0) & g_z(x_0, y_0, z_0) \\ h_x(x_0, y_0, z_0) & h_y(x_0, y_0, z_0) & h_z(x_0, y_0, z_0) \end{vmatrix} = 0 \\ g(x_0, y_0, z_0) = k \\ h(x_0, y_0, z_0) = k \end{cases}$$

<u>Aplicações Comuns:</u>

1. <u>Problema de volume</u>: maximizar o volume de um corpo com restrição de área.

Exemplo: Maximizar volume de caixa retangular, com área máxima de 10 m^2

$$f(x, y, z) = V = xyz$$

$$C: \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 2xy + 2xz + 2yz\}$$

2. <u>Problema de distância</u>: encontrar os pontos mais e menos distantes de outro ponto, pertencendo a um conjunto.

Exemplo: Encontrar os pontos mais e menos distantes do ponto (x_P, y_P, z_P) no conjunto C: $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ x + y - z = 1\ e\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

Maximizar e minimizar $f(x, y, z) = (x - x_P)^2 + (y - y_P)^2 + (z - z_P)^2$