estudar.com.vc

# Cálculo 3

## Integrais de Linha

Resumo e Exercícios P2

# Integrais de Linhas de Campos Vetoriais

## Calculo pelo produto escalar

Dado um campo vetorial $\vec{F}$ e uma curva $\gamma$ e sua orientação, com parametrização $\gamma(t),\ a < t < b$, calculamos a integral de linha de $\vec{F}$, sobre a curva $\gamma$ a partir da fórmula:

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot \vec{d}r = \int_{a}^{b} \vec{F}\big(\gamma(t)\big) \cdot \gamma'(t)dt$$

Ao aplicar este método, basta seguir a receita:

- Identificar o campo $\vec{F}$ e a curva $\gamma$
- Parametrizar a curva $\gamma$ de acordo com a orientação dada, obtendo $\gamma(t)$, com $a < t < b$
- Calcular $\vec{F}\big(\gamma(t)\big)$ e $\gamma'(t)$
- Calcular a integral $\int_{a}^{b} \vec{F}\big(\gamma(t)\big) \cdot \gamma'(t)dt$

Muitas vezes a integral é dada na forma $\int_{\gamma} Pdx + Qdy + Rdz$ , onde $\vec{F} = (P, Q, R)$

## Campos Conservativos

Dado um campo $F = (P, Q, R)$, temos que:

$$rot\ F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$D.S.C \rightarrow Dominio\ simplismente\ conexo \rightarrow "sem\ furos"$

$rot\ F = 0\ e\ D.S.C \leftrightarrow F\ \text{é}\ conservativo$

$rot\ F\ \neq 0\ \rightarrow F\ não\ \text{é}\ conservativo$

$rot\ F = 0\ e\ D.N.S.C\ \rightarrow F\ não\ \text{é}\ conservativo$

## Propriedades de Campos Conservativos

- $F = \nabla f$, onde $f$ é a função potencial de $F$
- A integral de linha entre os pontos $A$ e $B$ de uma curva $\gamma$ vale $f(B) - f(A)$, ou seja, $\int_\gamma \vec{F} \cdot \vec{d}r = f(B) - f(A)$
- A integral de linha sobre uma curva fechada vale 0, ou seja, $\oint_C \vec{F} \cdot \vec{d}r = 0$

## Teorema de Green

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot \vec{d}r = \iint_D rot\ F\ \cdot k\ dxdy$$

Integral de Linha → Integral Dupla

Neste caso $\gamma$ é uma curva fechada e $D$ é o interior de $\gamma$, ou seja, $\gamma$ é a fronteira da região $D$

Só se aplica quando (ambas) as seguintes condições são obedecidas:

- Quando $\gamma$ estiver orientada positivamente
- Quando $D$ pertencer ao domínio de $F$

O que é orientada positivamente? As curvas que compõe uma região precisam estar orientadas da seguinte forma:

- Fronteira exterior no sentido anti-horário
- Fronteira(s) interior(es) no sentido horário

## Integrais de Linhas de Campos Escalares

### Cálculo das Integrais

Dado um campo escalar $f$ e uma curva, com parametrização $\gamma(t),\ a < t < b$, calculamos a integral de linha de $f$, sobre a curva $\gamma$ a partir da fórmula:

$$\int_{\gamma} f ds = \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)|\gamma'(t)|dt$$

### Aplicações das Integrais de Campos Escalares

- Comprimento de fio

Dado um fio delgado $\gamma = \gamma(t),\ \ a \leq t \leq b$, o comprimento do fio é dado por:

$$\int_{\gamma} ds = \int_a^b |\gamma'(t)|dt$$

- Massa do fio

Dado um fio delgado $\gamma = \gamma(t),\ \ a \leq t \leq b$, com densidade $f$, a massa do fio é dada por:

$$\int_{\gamma} f ds = \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)|\gamma'(t)|dt$$

- Centro de Massa de um fio:

Dado um fio delgado $\gamma = \gamma(t),\ \ a \leq t \leq b$, com densidade $f$, as coordenadas do centro de massa do fio ficam dadas por:

- $Coordenada\ x = \dfrac{\int_{\gamma}\ xfds}{Massa}$
- $Coordenada\ y = \dfrac{\int_{\gamma}\ yfds}{Massa}$
- $Coordenada\ z = \dfrac{\int_{\gamma}\ zfds}{Massa}$

# Exercícios

## 1. Integrais de Linha de Campos Vetoriais – Produto Escalar

*Lista 2- 2017, Questão 5 - a*

Calcule $\int_{\gamma}\ \vec{F}\cdot\vec{d}r$, onde $F = (x^2 + y, -7yz, 2xz^2)$ e $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$ ligando os pontos $(0,0,0) \rightarrow (1,1,1)$

## 2. Integrais de Linha de Campos Vetoriais – Produto Escalar

*Lista 2- 2017, Questão 6 - b*

Calcule $\int_{\gamma}\ \vec{F}\cdot\vec{d}r$, onde $F = 2(x+y)i + (x-y)j$ e $\gamma$ é a circunferência de raio 2 centrada na origem, percorrida uma vez no sentido horário

## 3. Integrais de Linha de Campos Vetoriais – Produto Escalar

*Lista 2- 2017, Questão 8 – c*

Calcule $\int_\gamma \sqrt{y}dx + \sqrt{x}dy,$, onde $\gamma$ é a fronteira da região limitada por $x = 0, y = 1\ e\ y = x^2$, percorrida uma vez no sentido horário

## 4. Integrais de Linha de Campos Vetoriais – Produto Escalar

*Lista 2- 2017, Questão 8 – c*

Calcule $\int_\gamma x^2dx + xdy + zdz$, onde $\gamma$ é intersecção das superfícies $z = \frac{x^2}{9}$ e $z = 1 - \frac{y^2}{4}$, orientada de modo que sua projeção no plano $Oxy$ seja percorrida uma vez no sentido anti-horário

## 5. Campos Conservativos e suas Propriedades

*Lista 2- 2017, Questão 23*

Os campos $F(x,y) = (x,x)\ e\ F(x,y) = (2xe^y + y)i + (x^2e^y + x - 2y)j,$ são conservativos? Se sim, determine as funções potencias de cada campo.

## 6. Campos Conservativos e suas Propriedades

*Lista 2- 2017, Questão 23*

Calcule $\int_\gamma \vec{F} \cdot \vec{dr}$, onde $F(x,y) = (2xe^y + y)i + (x^2e^y + x - 2y)j$, e $\gamma$ é a elipse completa percorrida no sentido horário dada pela intersecção entre as superfícies $z = 3x^2 + 2y^2$ e $z = x^2 + y^2 + 1$

## 7. Campos Conservativos e suas Propriedades

*Lista 2- 2017, Questão 23*

Calcule $\int_\gamma \frac{2xy^2}{x^2+1}dx + 2y\ln(1+x^2)\,dy$, onde $\gamma$ é a elipse $4x^2 + y^2 = 1$ percorrida de $(0,1) \to \left(\frac{1}{2}, 0\right)$

## 8. Teorema de Green

*Lista 2- 2017, Questão 10 - g*

Calcule $\int_{\gamma} \left(xy + e^{x^2}\right)dx + \left(x^2 - \ln(1+y)\right)dy$, onde $\gamma$ é o segmento de reta que liga $(0,0) \rightarrow (\pi, 0)$ e o arco $y = \sin x$, orientada no sentido horário

## 9. Teorema de Green

*Construção do autor*

Calcule $\int_{\gamma} \frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{-x}{x^2+y^2}\, dy$, onde $\gamma$ é uma circunferência qualquer centrada na origem. Em seguida calcule a mesma integral, quando $\gamma$ é uma curva qualquer que enlaça a origem.

## 10. Integrais de Linha de Campos Escalares

*Lista 2-2017, Questão 1 - c*

Calcule $\int_{\gamma} (x - 2y^2)ds$, onde $\gamma$ é o arco de parábola $y = x^2$ que liga os pontos $(-2,4) \rightarrow (1,1)$

## 11. Integrais de Linha de Campos Escalares – Aplicações

*Lista 2-2017, Questão 2 - a*

Calcule a massa de um arame cujo formato é $\gamma(t) = (2t, t^2, t^2)$, onde $0 < t < 1$ e a densidade pontual é $f(x, y, z) = x$

# Exercícios de Provas:

## 1. Questão 1 – P2 2015

a) Calcule $\int_\gamma e^x dx + xzdy + zydz$ , onde $\gamma$ é a intersecção das superfícies $x^2 - y^2 + z^2 = 1$ e $y + x = 2$ , percorrida de $(1,-1,1) \rightarrow (1,1,1)$

b) Seja $F(x,y) = \left(y^2 - 2xy, \frac{2y}{y^2+1} - x^2 + 2xy\right)$

(i) $F$ é conservativo? Justifique

(ii) Calcule a integral de linha de $F$ sobre $\gamma(t) = \left(t^3 - t, \sqrt{e^{x^2} - 1}\right)$, onde $0 \leq t \leq 1$

## 2. Questão 2 – P2 2015

Calcule $\int_\gamma (\sin x^2 - y^2)dx + (xy + y^3)dy$, onde $\gamma$ é a curva $x^2 - 2x + y^2 - 2y = 7$, com $x \leq 1$e percorrida no sentido anti-horário

## 3. Questão 3– P2 2015

Seja o campo $F(x,y) = \left(\frac{y}{(x-1)^2+4y^2}, -\frac{x-1}{(x-1)^2+4y^2}\right) + (-xy + \sin y\,, x^2 + x\cos y)$ e seja $\gamma$ a fronteira da região limitada pelo gráfico das funções $y = 8 + 2x - x^2$ e $y = x^2 - 4$, percorrida no sentido horário. Calcule $\int_\gamma \vec{F} \cdot \vec{d}r$

## Gabarito dos Exercícios

**1.** $-\frac{11}{15}$

**2.** $\pi$

**3.** $-\frac{3}{10}$

**4.** $6\pi$

**5. Apenas o segundo campo.** $f(x, y) = x^2y + xy - y^2$

**6.** $0$

**7.** $0$

**8.** $-\pi$

**9.** $2\pi$ **ou** $-2\pi$

**10.** $48$

**11.** $2\sqrt{3} - \frac{2}{3}$

## Gabarito das Provas

**1. a)** $\frac{11}{30} - \frac{1}{e}$

**b) sim;** $1$

**2.** $\frac{27\pi}{2} - 66$

**3.** $\pi - \frac{125}{2}$