estudar.com.vc

Cálculo

Integrais Duplas e Triplas

Integrais iteradas

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy$$

Teorema de Fubini – Regiões Retangulares

$R = \{(x,y) \in R^2 / \, a < x < b \, , c < y < d\}$

$$\iint_{\boldsymbol{R}} f(x,y) = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx$$

Teorema de Fubini – Extensão para regiões genéricas

$R = \{(x,y) \in R^2 / \, a < x < b \, , g(x) < y < h(x)\}$

$$\iint_{\boldsymbol{R}} f(x,y) = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dydx$$

$R = \{(x,y) \in R^2 / \, g(y) < x < h(y) \, , c < y < d\}$

$$\iint_{\boldsymbol{R}} f(x,y) = \int_c^d \int_{g(y)}^{h(y)} f(x,y)dxdy$$

Mudança de Coordenadas - Linear

$x = x(u,v)$

$y = y(u,v)$

$$\iint_{\boldsymbol{R}} f(x,y)\, dxdy = \iint_{\boldsymbol{D}} f(u,v)|J|dudv$$

$|J| \rightarrow Jacobiano\ da\ mudança$

$$|J| = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{matrix} \right\|$$

Mudança de Coordenadas - Polares

$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

$r \rightarrow distacia\ em\ relação\ à\ origem$

$\theta \rightarrow ângulo\ de\ abertura$

$$\iint_{\boldsymbol{R}} f(x,y)\,dxdy = \iint_{\boldsymbol{D}} f(r,\theta)rdrd\theta$$

$|J| = r \rightarrow Jacobiano\ das\ polares$

Massa

$$Massa\ de\ uma\ região\ R\ = \iint_{\boldsymbol{R}} f(x,y)\,dxdy, onde\ f(x,y)\ é\ a\ densidade$$

Centro de Massa

$$Coordenada\ x = \frac{\iint_{\boldsymbol{R}}\ xf(x,y)\,dxdy}{Massa}$$

$$Coordenada\ y = \frac{\iint_{\boldsymbol{R}}\ yf(x,y)\,dxdy}{Massa}$$

Volume

$$Volume\ da\ superficie\ f(x,y)\ sobre\ a\ região\ R = \iint_{\boldsymbol{R}} f(x,y)\,dxdy$$

Integrais iteradas

$$\int_a^b \int_c^d \int_e^f f(x,y,z)\,dzdydx\ \rightarrow \text{6 ordens possiveis}$$

Teorema de Fubini – Prismas Retangulares

$$E = \{(x,y) \in R^3 / \, a < x < b \, , c < y < d \, , e < z < f\}$$

$$\iiint_E f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b \int_c^d \int_e^f f(x,y,z)\, dzdydx \rightarrow Qualquer\ ordem$$

<u>Teorema de Fubini – Extensão para regiões genéricas</u>

$$E = \{(x,y,z) \in R^3/(x,y) \in D \, ; \, u_1(x,y) < z < u_2(x,y)\}$$

$$\iiint_E f(x,y,z)dxdydz = \iint_D \left[\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right] dxdy$$

$$E = \{(x,y,z) \in R^3/(y,z) \in D \, ; \, u_1(y,z) < x < u_2(y,z)\}$$

$$\iiint_E f(x,y,z)dxdydz = \iint_D \left[\int_{u_1(y,z)}^{u_2(y,z)} f(x,y,z)dx\right] dydz$$

$$E = \{(x,y,z) \in R^3/(x,z) \in D \, ; \, u_1(x,z) < y < u_2(x,z)\}$$

$$\iiint_E f(x,y,z)dxdydz = \iint_D \left[\int_{u_1(x,z)}^{u_2(x,z)} f(x,y,z)dy\right] dxdz$$

*Sempre integrar variável dependente primeiro!

<u>Mudança de Coordenadas - Linear</u>

$x = x(u,v,m)$
$y = y(u,v,m)$
$z = z(u,v,m)$

$$\iiint_E f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{E'} f(u,v,m)|J|dudvdm$$

$|J| \rightarrow Jacobiano\ da\ mudança$

$$|J| = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial m} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial m} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial m} \end{matrix} \right\|$$

<u>Mudança de Coordenadas - Cilíndricas</u>

$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

$z = z$

$r \rightarrow distancia\ em\ relação\ ao\ eixo\ z$

$\theta \rightarrow ângulo\ de\ abertura$

$$\iiint_E f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{E'} f(r,\theta,z)rdrd\theta dz$$

$|J| = r \rightarrow Jacobiano\ das\ cilindricas$

<u>Mudança de Coordenadas – Esféricas</u>

$x = \rho\cos\theta\ sin\ \phi$

$y = \rho\sin\theta\sin\phi$

$z = \rho\cos\phi$

$\rho\ \rightarrow\ Distancia\ do\ ponto\ à\ origem$

$\theta\ \rightarrow\ ângulo\ de\ revolução$

$\phi\ \rightarrow\ Abertura\ em\ relação\ ao\ eixo\ z$

$$\iiint_E f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{E'} f(\rho,\theta,\phi)\rho^2\sin\phi\, d\rho d\theta d\phi$$

$|J| = \rho^2 \sin\phi \rightarrow Jacobiano\ das\ esféricas$

Massa

$$Massa\ de\ E\ = \iiint_E f(x,y,z)dxdydz\ , onde\ f(x,y,z)\ \text{é}\ a\ densidade$$

Centro de Massa

$$Coordenada\ x = \frac{\iiint_E xf(x,y,z)dxdydz}{Massa}$$

$$Coordenada\ y = \frac{\iiint_E yf(x,y,z)dxdydz}{Massa}$$

$$Coordenada\ z = \frac{\iiint_E zf(x,y,z)dxdydz}{Massa}$$

Volume

$$Volume\ da\ região\ E\ = \iiint_E 1dxdydz$$