www.estudar.com.vc

Fuja do Nabo P1 Poli USP Resolução

Exercício 4 Continuidade

Explicação

4. Determine em que pontos a função abaixo é contínua.

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} \sin(x^2 - 4) + 5, & x > 2 \\ 5, & x = 2 \\ \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2}, & x < 2 \end{cases}}$$

A questão apresenta uma função “quebrada”, ou seja, uma que **assume 3 diferentes formas** dependendo do intervalo.

Para saber onde a função é contínua, é necessário lembrar o que significa uma função ser contínua.

Toda função $\boldsymbol{f(x)}$ **é contínua em um ponto $\boldsymbol{a}$ se**:

$$\boldsymbol{f(a) = \lim_{x \to a} f(x)}$$

Ou seja, a função, calculada no ponto, deve ter valor igual ao limite da expressão para quando x tende ao ponto.

E uma função é **contínua em um intervalo** se ela for **contínua em todos os pontos desse intervalo.**

Repare que as expressões $\sin(x^2 - 4) + 5$, 5 e $\frac{x^2+x-6}{x-2}$ são todas racionais (ou seja, definida no intervalo dos reais). Assim, automaticamente, elas são contínuas em todos os pontos do conjunto real, exceto onde não são definidas, ou onde a função $f(x)$ é quebrada.

Neste caso, a função é quebrada em $x = 2$, e $\frac{x^2+x-6}{x-2}$ não é definida em $x = 2$, então este ponto deverá ser analisado.

Para $f(x)$ ser contínua em $x = 2$, basta que o limite da expressão que represente a função em $x < 2$ seja igual a $f(2)$, e que o limite da expressão que define a função em $x > 2$ seja, também, igual a $f(2)$.

Para quando x se aproxima de 2 pela esquerda, verificaremos se:

$$f(2) = \lim_{x\to 2^-} f(x)$$

Ou seja:

$$5 = \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}$$

Não é possível utilizar a propriedade da substituição direta, pois a expressão não é definida em $x = 2$.

No entanto, é possível verificar que 2 é raiz da expressão $x^2 + x - 6$. As raízes da expressão (utilizando Bhaskara) são 2 e -3. Assim, ela pode ser reescrita assim:

$$x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$$

Portanto, temos:

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{(x - 2)(x + 3)}{x - 2}$$

Cortando o $x - 2$ do numerador e do denominador, fica:

$$\lim_{x \to 2^-} (x + 3) = 2 + 3 = 5$$

Para quando x se aproxima de 2 pela direita, verificaremos se:

$$f(2) = \lim_{x \to 2^+} f(x)$$

Ou seja:

$$5 = \lim_{x \to 2^+} \sin(x^2 - 4) + 5$$

Neste caso, é possível utilizar a propriedade da substituição direta, pois a expressão é definida em $x = 2$. Fica:

$$\lim_{x \to 2^+} \sin(x^2 - 4) + 5 = \sin(2^2 - 4) + 5 = \sin(0) + 5 = 5$$

Portanto, como ambas as expressões têm limite 5 para quando x tende a 2, e $f(2) = 5$, a função **é contínua em $x = 2$**.

E como ela é definida por expressões racionais, que, no caso, são contínuas em todo x real diferente de 2, ela **é contínua em todo intervalo real**.

Assim:

$$f(x) \text{ é contínua em } \mathbb{R}$$

Resposta esperada: $\mathbb{R}$