www.estudar.com.vc

Fuja do Nabo P1 Poli USP Resolução

Exercício 3a Limites Infinitos e Limites no Infinito

Explicação

3. Calcule os limites abaixo ou mostre que eles não existem.

a. $\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x^3 - x^2}$

Para calcular o limite apresentado, ou seja, o limite para quando x tende a 0 pela direita (valores um pouco maiores que 0), deve-se perceber que não basta substituir o 0 no lugar de x, já que seria encontrada uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$.

Assim, deve-se tentar usar alguma técnica de limites para resolvê-lo. Como há um seno no numerador da expressão, calculado em x, podemos lembrar do **limite fundamental trigonométrico.**

O limite em questão diz que, sempre que no numerador existir uma expressão $\sin f(x)$, e no denominador uma $f(x)$, se $f(x)$ tender a zero, temos:

$$\lim_{f(x) \to 0} \frac{\sin f(x)}{f(x)} = 1$$

Fatorando o denominador (lembrando que x é fator comum), chegamos em:

$$x^3 - x^2 = x(x^2 - x)$$

Desta forma, o limite pode ser reescrito como:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x^3 - x^2} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{(x^2 - x)}$$

No entanto, a expressão $(x^2 - x)$ **pode ser fatorada novamente**, usando x como fator comum:

$$(x^2 - x) = x(x - 1)$$

Finalmente, reescrevendo mais uma vez o limite principal, chegamos em:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x^3 - x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{(x-1)} \cdot \frac{1}{x}$$

Quando $\boldsymbol{x}$ **tende a 0 pela direita** (ou seja, por números infinitamente próximos a zero, mas positivos), $\frac{\sin x}{x}$ tende a 1, enquanto $\frac{1}{(x-1)}$ tende a -1 (pois um número muito próximo a zero, menos 1, tende a -1). Ou seja:

$$\frac{\sin x}{x} \to 1 \text{ e } \frac{1}{(x-1)} \to -1$$

Ao mesmo tempo, $\frac{1}{x}$ tende a mais infinito ($+\infty$), pois, conforme x tende a um número positivo muito próximo de zero, $\frac{1}{x}$ tende a números cada vez mais altos, até tender ao infinito. Ou seja:

$$\frac{1}{x} \to +\infty$$

Assim, a expressão toda tende a $1 \cdot (-1) \cdot \infty$, ou seja, $-\infty$. Portanto:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x^3 - x^2} = -\infty$$

Resposta esperada: $-\infty$