www.estudar.com.vc

Cálculo I
Derivadas e Taxas Relacionadas

Resumo e Exercícios P1

Parte 2

Fórmulas e Resumo Teórico

Definição de Derivada em um Ponto

A derivada de uma função f, num ponto $x = a$ pertencente a seu domínio, será $f'(a)$, tal que:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Graficamente, $f'(a)$ indica o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função f no ponto $x = a$.

Derivabilidade e Continuidade

Se uma função f é derivável em um ponto $x = a$, então, podemos dizer que ela é contínua em $x = a$.

Mas, se uma função f é contínua em $x = a$, não necessariamente ela será derivável em $x = a$.

Principais Derivadas

- $[c]' = 0$
- $[x^n]' = n \cdot x^{n-1}$
- $[\sin x]' = \cos x$
- $[\cos x]' = -\sin x$

Regras de Derivação

Regra da Soma e Subtração: $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$

Regra do Produto: $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

Regra do Quociente: $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$, desde que $g(x) \neq 0$

Regra da Cadeia

A derivada da função composta fog é tal que:

$$(fog)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Em outras palavras: a derivada da função composta é igual à derivada da função **"mais externa"**, calculada na função **"mais interna"**, vezes a derivada da função **"mais interna"**.

Reta Tangente

A equação da reta tangente a uma função f em um ponto $x = a$ é dada por:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

Exercícios de Fixação

1. Definição de Derivada

Lista 1

Calcule $f'(0)$, sendo f a função dada por:

$$f(x) = \begin{cases} g(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0 \quad , & x = 0 \end{cases}$$

com $g(0) = g'(0) = 0$.

2. Regras de Derivação

Elaboração própria

a. $f(x) = 3x^2 \cdot \sin(x) - \sqrt[4]{x} + 30$

b. $g(x) = \frac{5x^{10} \cdot \tan x}{\cos x}$

c. $m(x) = \sin\big(\sin(\sqrt{x}\tan x)\big)$

3. Reta Tangente

P1 Unicamp (Adaptada)

Encontre os pontos do gráfico da função $f(x) = \frac{2x+5}{x+3}$ onde a reta tangente é paralela à reta $y = \frac{x}{4}$. Dê a equação de uma dessas retas.

4. Derivação Implícita

P1 -2016

Seja f uma função derivável definida em um intervalo aberto centrado em $x = 0$ e dada implicitamente pela equação:

$$y^3 + xy^2 + y = 2\sin x + 2$$

O valor de $f'(0)$ é:

a. 5
b. 8
c. $\frac{1}{4}$
d. $\frac{1}{2}$
e. 1

5. Taxas Relacionadas

Lista 1

Um objeto circular tem seu raio variando de maneira desconhecida, mas sabe-se que quando seu raio é $6\ m$, a taxa de variação deste é $4\ m/s$. Determine a taxa de variação da área do objeto no instante que seu raio mede $6\ m$.

Exercícios de Prova

1. Definição de Derivada e Regras de Derivação

P1 2016

Seja $f(x) = \sin\left(\sqrt[3]{x^3 + x^2}\right) \cdot \sin\left(\sqrt[3]{x}\right)$, determine os pontos em que f não é derivável. Nos demais pontos, calcule $f'(x)$.

2. Derivabilidade

P1 2017

Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + x + 5, & x \leq 1 \\ ax + b \ , & x > 1 \end{cases}$$

Para que f seja derivável em $x = 1$, a e b devem ser, respectivamente:

a. 5 e 3.
b. 2 e 3.
c. 4 e qualquer b real.
d. 4 e 3.
e. f não é derivável em $x = 1$ para nenhum valor de a e b.

3. Reta Tangente

P1 2016

Dentre todas as retas tangentes ao gráfico de $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$, a única que passa pelo ponto $(1,0)$:

a. $x = 1 + 2y$
b. $x = 1 - 2y$
c. $2x = 2 + y$
d. $x = 1 + y$
e. $2x = 2 - 3y$

4. Derivação Implícita e Reta Tangente
P1 2017

Encontre a reta tangente à curva $x^2y(x + 3y) = x^2 + 3y^2$ no ponto $(1,1)$. Admita que a curva define implicitamente $y = y(x)$ como função diferenciável de x em algum intervalo aberto contendo 1 e de forma que $y(1) = 1$.

5. Taxas Relacionadas
P1 2015

Uma barra, representada na figura pelo segmento AB, tem a extremidade A apoiada em um plano inclinado e a extremidade B no chão, conforme a figura. No instante t_0, a barra desliza de modo que o segmento AO mede 20 cm e diminui a uma taxa de variação de 10 cm/s. Sabendo que o segmento OB mede 40 cm no instante t_0, determine a taxa de variação de OB nesse instante.

Gabarito

Exercícios de Fixação

1. $f'(0) = 0$

2.

a. $f'(x) = 6x \cdot \sin(x) + 3x^2 \cdot \cos(x) - \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$

b. $g'(x) = \frac{(50x^9 \cdot \tan x + 5x^{10} \cdot \sec^2 x)\cos x + 5x^{10} \cdot \tan x \cdot \sin x}{\cos^2 x}$

c. $m'(x) = \left(\frac{\tan x}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} \cdot \sec^2 x\right) \cdot \cos\left(\sin\left(\sqrt{x} \cdot \tan x\right)\right) \cdot \cos\left(\sqrt{x} \cdot \tan x\right)$

3. $\left(-1, \frac{3}{2}\right)$ e $\left(-5, \frac{5}{2}\right)$

4. Alternativa c.

5. A área varia a uma taxa de $48\pi\ m^2/s$.

Exercícios de Prova

1. f não é derivável apenas em $x = -1$. $f'(0) = 1$, e para todo x diferente de -1 e 0, $f(x) = \sin\left(\sqrt[3]{x}\right) \cdot \cos\left(\sqrt[3]{x^3 + x^2}\right) \cdot \frac{3x^2 + 2x}{3\sqrt[3]{(x^3 + x^2)^2}} + \sin\left(\sqrt[3]{x^3 + x^2}\right) \cdot \frac{\cos\left(\sqrt[3]{x}\right)}{3\sqrt[3]{x^2}}$

2. Alternativa d.

3. Alternativa a.

4. $y = -7x + 8$

5. O segmento OB varia a uma taxa de $8\ cm/s$.