



[www.estudar.com.br](http://www.estudar.com.br)

# Cálculo III

## Integrais Duplas e Triplas

### Resumo e Exercícios P1





## Fórmulas e Resumo Teórico: Parte 1

### Teorema de Fubini: Regiões Retangulares

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

$$\iint_R f(x, y) = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$$

### Teorema de Fubini: Extensão para Regiões Genéricas

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\}$$

$$\iint_R f(x, y) = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy dx$$

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / g(y) < x < h(y), c < y < d\}$$

$$\iint_R f(x, y) = \int_c^d \int_{g(y)}^{h(y)} f(x, y) dx dy$$

### Mudança de Coordenadas: Linear

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$$

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \iint_D f(u, v) |Jac| du dv$$

$|Jac| \rightarrow$  Jacobiano da mudança



$$|Jac| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

## Mudança de Coordenadas: Polares

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

$r \rightarrow$  distância em relação à origem

$\theta \rightarrow$  ângulo de abertura

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \iint_D f(r, \theta) r dr d\theta$$

$|Jac| = r \rightarrow$  Jacobiano das polares

## Massa

Massa de uma região  $R = \iint_R f(x, y) dx dy$ , onde  $f(x, y)$  é a densidade

## Centro de Massa

$$\text{Coordenada } x = \frac{\iint_R x f(x, y) dx dy}{\text{Massa}}$$

$$\text{Coordenada } y = \frac{\iint_R y f(x, y) dx dy}{\text{Massa}}$$



## Volume

*Volume da superfície  $f(x, y)$  sobre a região  $R = \iint_R f(x, y) \, dx \, dy$*

## Área

*Área da região  $R = \iint_R 1 \, dx \, dy$*



## Exercícios de Fixação: Parte 1

### 1. Teorema de Fubini

*Elaboração própria*

Calcule as seguintes integrais duplas:

- $\iint_R x + y$ , onde  $R$  é a região do plano limitada pelas retas  $x = 1$ ,  $x = 2$ ,  $y = 0$  e  $y = 2$ .
- Calcule  $\iint_R x \cos y$ , onde  $R$  é a região limitada por  $y = 0$ ,  $y = x^2$  e  $x = 1$ .

### 2. Mudança de Coordenadas

*Lista 1*

- Calcule  $\iint_R x \, dx \, dy$ , onde  $R$  é o disco de centro na origem e raio 5.
- Calcule a massa de  $D = \{(x, y): (x - 2y + 3)^2 + (3x + 4y - 1)^2 \leq 100\}$ , com função densidade  $\delta(x, y) = x - 2y + 18$ .



## Exercícios de Prova: Parte 1

### 1. Teorema de Fubini

*P1 2017*

Calcule a seguinte integral iterada:

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \frac{y}{\sqrt{1+x^5}} dx dy$$

### 2. Mudança de Coordenadas

*P1 2016*

Calcule  $\iint_D (3x + 2y)^2 \cos(9x^2 - 4y^2) dx dy$ , sendo  $D$  a região do plano limitada por  $3x + 2y = 1$ ,  $3x + 2y = 2$ ,  $x = 0$  e  $y = 0$ .

### 3. Coordenadas Polares

*P1 2017, 2015*

- Calcule a área da região plana entre as retas  $3y = \sqrt{3}x$ ,  $y = \sqrt{3}x$  e limitada por  $x^2 + y^2 = 2x$ .
- Calcule a área de um laço da rosácea cuja equação em coordenadas polares é dada por  $r(\theta) = \cos(5\theta)$ .



## Fórmulas e Resumo Teórico: Parte 2

### Teorema de Fubini: Prismas Retangulares

$$E = \{(x, y) \in R^3 / a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, e \leq z \leq f\}$$

$$\iiint_E f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \int_c^d \int_e^f f(x, y, z) dz dy dx \rightarrow \text{Qualquer ordem}$$

### Teorema de Fubini: Extensão para Regiões Genéricas

$$E = \{(x, y, z) \in R^3 / a \leq x \leq b, u_1(x) \leq y \leq u_2(x), v_1(x, y) \leq z \leq v_2(x, y)\}$$

$$\iiint_E f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \int_{u_1(x)}^{u_2(x)} \int_{v_1(x, y)}^{v_2(x, y)} f(x, y, z) dz dy dx$$

### Mudança de Coordenadas: Linear

$$\begin{cases} x = x(u, v, m) \\ y = y(u, v, m) \\ z = z(u, v, m) \end{cases}$$

$$\iiint_E f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{E'} f(u, v, m) |Jac| du dv dm$$

$|Jac| \rightarrow$  Jacobiano da mudança



$$|Jac| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial m} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial m} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial m} \end{vmatrix}$$

### Mudança de Coordenadas: Cilíndricas

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

$r \rightarrow$  distância em relação ao eixo  $z$

$\theta \rightarrow$  ângulo de abertura

$$\iiint_E f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{E'} f(r, \theta, z) r dr d\theta dz$$

$|Jac| = r \rightarrow$  Jacobiano das cilíndricas

### Mudança de Coordenadas: Esféricas

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \sin \varphi \\ y = \rho \sin \theta \sin \varphi \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases}$$

$\rho \rightarrow$  Distância do ponto à origem

$\theta \rightarrow$  ângulo de revolução





$\varphi \rightarrow$  Abertura em relação ao eixo  $z$

$$\iiint_E f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{E'} f(\rho, \theta, \phi) \rho^2 \sin \phi d\rho d\theta d\phi$$

$|Jac| = \rho^2 \sin \phi \rightarrow$  Jacobiano das esféricas

### Massa

$$\text{Massa de } E = \iiint_E f(x, y, z) dx dy dz, \text{ onde } f(x, y, z) \text{ é a densidade}$$

### Centro de Massa

$$\text{Coordenada } x = \frac{\iiint_E x f(x, y, z) dx dy dz}{\text{Massa}}$$

$$\text{Coordenada } y = \frac{\iiint_E y f(x, y, z) dx dy dz}{\text{Massa}}$$

$$\text{Coordenada } z = \frac{\iiint_E z f(x, y, z) dx dy dz}{\text{Massa}}$$

### Volume

$$\text{Volume da região } E = \iiint_E 1 dx dy dz$$



## Exercícios de Fixação: Parte 2

### 1. Teorema de Fubini

*Lista 1*

Calcule a seguinte integral tripla:

$\iiint_R y \, dx dy dz$ , onde  $R$  é a região abaixo do plano  $z = x + 2y$  e acima da região no plano  $xy$  limitada pelas curvas  $y = x^2$ ,  $y = 0$  e  $x = 1$ .

### 2. Mudança de Coordenadas: Cilíndricas

*Lista 1*

Calcule a seguinte integral tripla:

$\iiint_E y \, dx dy dz$ , onde  $E$  é a região entre os cilindros  $x^2 + y^2 = 4$  e  $x^2 + y^2 = 1$ , limitada pelo plano  $xy$  e pelo plano  $z = x + 2$ .

### 3. Mudança de Coordenadas: Esféricas

*Elaboração própria*

Calcule a massa da região  $D$  contida no primeiro octante que é interior ao cone  $\varphi = \frac{\pi}{6}$  e à esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ , com função densidade  $\delta(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .



## Exercícios de Prova: Parte 2

### 1. Mudança de Coordenadas: Cilíndricas

P1 2016

Calcule a massa do sólido dado por  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 16, x^2 + y^2 + \frac{z^2}{9} \geq 1, z \geq 0\}$  com densidade  $\delta(x, y, z) = x^2 + y^2$ .

### 2. Mudança de Coordenadas: Esféricas

P1 2015

Calcule a massa do sólido que está contido na parte interna da bola  $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 \leq 1$ , acima do cone  $z = \sqrt{\frac{1}{3}(x^2 + y^2)}$  e abaixo do cone  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ , com densidade  $\delta(x, y, z) = z$ .

### 3. Mudança de Coordenadas - Esféricas

P1 2017

Calcule o volume do sólido  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 \leq x^2 + y^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x^2 + y^2 \geq 2\}$ .



## Gabarito: Parte 1

### Exercícios de Fixação

1.

a. 5

b.  $\frac{1 - \cos 1}{2}$

2.

a. 0

b.  $150\pi$

### Exercícios de Prova

1.  $\frac{\sqrt{2}-1}{5}$

2.  $\frac{\cos 1 - \cos 4}{12}$

3.

a.  $\frac{\pi}{6}$

b.  $\frac{\pi}{20}$



## Gabarito: Parte 2

### Exercícios de Fixação

1.  $\frac{5}{28}$

2. 0

3.  $\frac{\pi}{2}(2 - \sqrt{3})$

### Exercícios de Prova

1.  $\frac{4084\pi}{15}$

2.  $\frac{7\pi}{3}$

3.  $\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi$