www.estudar.com.vc

G1 2017.1 PUC Rio Adaptada

Exercício 1 Máximos e Mínimos de uma Função

Explicação

1. Considere dois números reais positivos a e b tais que

$$\boldsymbol{a \cdot b = 16}$$

Queremos minimizar a quantidade $a + 4b$. Para isso, encontre uma função $f(x)$ cujo valor mínimo seja a solução desse problema, indicando seu domínio. Além disso, encontre esse valor mínimo.

Sabendo que $a \cdot b = 16$, temos:

$$a \cdot b = 16 \quad => \quad b = \frac{16}{a}$$

Dessa maneira, substituindo em $a + 4b$, queremos encontrar o valor mínimo de $a + 4 \cdot \frac{16}{a}$. Trocando a, por x, temos a seguinte função:

$$f(x) = x + \frac{64}{x}$$

Cujo domínio é $Df = \{x \in \mathbb{R}: x > 0\}$, uma vez que estamos tratando de valores de a e b **positivos**.

Vamos então achar os candidatos a valor **mínimo** de $f(x)$. Para isso, devemos procurar os **pontos críticos** de $f(x)$, ou seja, valores de x tais que $f'(x) = 0$. Vamos começar achando $\boldsymbol{f'(x)}$:

$$\boldsymbol{f'(x)} = [x]' + \left[\frac{64}{x}\right]' = \boldsymbol{1 - \frac{64}{x^2}}$$

Igualando $f'(x) = 0$, temos:

$$1 - \frac{64}{x^2} = 0 \quad => \quad x^2 = 64 \quad => \quad x = \pm 8$$

Como estamos tratando apenas de valores positivos de x, $x = -8$ é uma solução que **não convém**. Assim $x = 8$ é nosso único **candidato a mínimo** de $f(x)$.

Para saber se realmente é ponto de mínimo, devemos fazer o **teste da segunda derivada**. Começamos calculando $\boldsymbol{f''(x)}$:

$$\boldsymbol{f''(x)} = [1]' - \left[\frac{64}{x^2}\right]' = \boldsymbol{\frac{128}{x^3}}$$

Calculando $f''(8)$:

$$f''(8) = \frac{128}{8^3} = \frac{1}{4} > 0$$

Como $f''(8) > 0$, temos que $x = 8$ é ponto de **mínimo** de $f(x)$.

Por fim, vamos calcular o valor mínimo de $f(x)$:

$$f(8) = 8 + \frac{64}{8} = 16$$

Resposta esperada: $f(x) = x + \frac{64}{x}$, sendo o domínio dessa função $Df = \{x \in \mathbb{R}: x > 0\}$, e o valor mínimo de $f(x)$ é 16.