www.estudar.com.vc

G1 2017.1 PUC Rio Adaptada

Exercício 2a Construção de Gráficos

Explicação

2. Considere a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} - 3x^3 + 5$$

a. Determine os intervalos de crescimento e decrescimento de $f(x)$, além dos máximos e mínimos locais.

Para analisarmos o crescimento e decrescimento de $f(x)$, devemos **analisar o sinal de $f'(x)$**. Vamos começar calculando $f'(x)$:

$$f'(x) = \left[\frac{x^5}{5}\right]' - \left[\frac{x^4}{2}\right]' - [3x^3]' + [5]' = x^4 - 2x^3 - 9x^2$$

Botando o x^2 em evidência, temos:

$$f'(x) = x^2(x^2 - 2x - 9)$$

Vamos analisar o sinal de $f'(x)$. Como x^2 é sempre **positivo** quando $x \neq 0$, vamos analisar apenas o sinal de $x^2 - 2x - 9$.

Vamos começar achando as raízes de $x^2 - 2x - 9$, ou seja, os valores de x que satisfazem $x^2 - 2x - 9 = 0$. Aplicando *Bhaskara*, temos:

$$x = 1 - \sqrt{10} \quad \text{ou} \quad x = 1 + \sqrt{10}$$

Sabemos que $x^2 - 2x - 9$ representa uma parábola com concavidade para cima, assim, temos que:

Se $x < 1 - \sqrt{10}$ ou $x > 1 + \sqrt{10}$, então $f'(x) > 0$

Se $1 - \sqrt{10} < x < 1 + \sqrt{10}$, então $f'(x) < 0$

Dessa forma, temos que $f(x)$ é crescente para $x < 1 - \sqrt{10}$ ou $x > 1 + \sqrt{10}$, e decrescente para $1 - \sqrt{10} < x < 1 + \sqrt{10}$.

Além disso, como em $x = 1 - \sqrt{10}$ a função passa de crescente para decrescente, $x = 1 - \sqrt{10}$ é ponto de máximo local. Já em $x = 1 + \sqrt{10}$, como ocorre o contrário, temos um ponto de mínimo local.

Resposta esperada: $f(x)$ é crescente para $x < 1 - \sqrt{10}$ ou $x > 1 + \sqrt{10}$, e decrescente para $1 - \sqrt{10} < x < 1 + \sqrt{10}$. Além disso, $x = 1 - \sqrt{10}$ é ponto de máximo local e $x = 1 + \sqrt{10}$ é ponto de mínimo local.