www.estudar.com.vc

P1 2015 UFABC
Resolução
Exercício 4 Plano Tangente
Explicação

4. Dada a superfície $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2yz + 3y^2 = 2xz^2 - 8x\}$, encontre a equação do plano tangente à S em $(1, 2, -1)$. Tal plano é paralelo ao plano xOy?

A equação do plano tangente é dada por:

$$\boldsymbol{F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0}$$

Precisamos então encontrar as **derivadas parciais** em relação a x, a y e a z

Então, vamos calcular F_x, F_y e F_z, em $F(x, y, z) = x^2yz + 3y^2 - 2xz^2 + 8x$

$$F_x = 2xyz - 4z^2 + 8$$

$$F_y = x^2 + 6y$$

$$F_z = x^2y - 4xz$$

Aplicando o ponto $(1,2,-1)$.

$$F_x = 2(1)(2)(-1) - 4(-1)^2 + 8 = -4 - 4 + 8 = 0$$

$$F_y = (1)^2 + 6(2) = 13$$

$$F_z = (1)^2(2) - 4(1)(-1) = 2 + 4 = 6$$

Substituindo os valores na equação do plano, encontramos a **equação da reta tangente**:

$$0(x-1)+13(y-2)+6\big(z-(-1)\big)=0$$
$$13y-26+6z+6=0$$

$$\mathbf{13y+6z-20=0}$$

Agora, precisamos **verificar se o plano encontrado é paralelo ao plano xOy.**

O vetor normal ao plano xOy é dado por $\vec{N}=(0,0,1)$, enquanto que o vetor normal do plano calculado é definido pelo vetor $\vec{V}$, onde $\vec{V}=(0,13,6)$, conforme encontramos acima.

Se o vetor for paralelo, deve haver um α tal que:

$$(0,13,6)=\alpha\cdot(0,0,1)$$

Então:

$$\begin{cases} 0=\alpha\cdot 0 \\ 13=\alpha\cdot 0 \\ 6=\alpha\cdot 1 \end{cases}$$

Esse sistema não possui solução, logo não existe tal α. Concluímos, portanto, que não são paralelos.

Resposta esperada: Equação do plano $13y+6z-20=0$; não são paralelos