P1 2017.1 UFRJ Adaptada

Exercício 1a Cálculo de Limites

Explicação

1.

a. Calcule o seguinte limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+9}-\sqrt{x+9}}{5x}$$

Primeiramente, tentando substituir $x = 0$ diretamente na expressão, a gente chega em uma **indeterminação** do tipo $\frac{0}{0}$.

Devemos, então, manipular algebricamente essa expressão para nos livrarmos da indeterminação.

Vamos começar multiplicando em cima e embaixo pelo **conjugado** do numerador, $\sqrt{x^2+9}+\sqrt{x+9}$, para surgir uma **diferença de quadrados** no numerador e eliminar os radicais:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt{x^2+9}-\sqrt{x+9}\right)\left(\sqrt{x^2+9}+\sqrt{x+9}\right)}{5x\left(\sqrt{x^2+9}+\sqrt{x+9}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt{x^2+9}\right)^2-\left(\sqrt{x+9}\right)^2}{5x\left(\sqrt{x^2+9}+\sqrt{x+9}\right)}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt{x^2+9}\right)^2-\left(\sqrt{x+9}\right)^2}{5x\left(\sqrt{x^2+9}+\sqrt{x+9}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2-x}{5x\left(\sqrt{x^2+9}+\sqrt{x+9}\right)}$$

Colocando x em evidência no numerador e cancelando:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x(x-1)}{5x\left(\sqrt{x^2+9}+\sqrt{x+9}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{x-1}{5\left(\sqrt{x^2+9}+\sqrt{x+9}\right)}$$

Agora que nos livramos da indeterminação, podemos substituir $x = 0$ diretamente na expressão:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - 1}{5\left(\sqrt{x^2 + 9} + \sqrt{x + 9}\right)} = \frac{0 - 1}{5\left(\sqrt{0^2 + 9} + \sqrt{0 + 9}\right)} = -\frac{1}{30}$$

Resposta esperada: $\boldsymbol{\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2+9} - \sqrt{x+9}}{5x} = -\frac{1}{30}}$