



www.estudar.com.br

P1 2017 Poli USP

Resolução

**Exercício 1 Interpretação de
uma Função pelo seu Limite
Explicação**





1. Dada $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, suponha que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$. Então:

Escolha uma alternativa:

- a. f é decrescente
- b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x^2) = +\infty$
- c. $\forall m \geq 0$, temos $f(x) \leq 0$ se $x \geq m$
- d. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$
- e. Nenhuma das respostas acima é correta

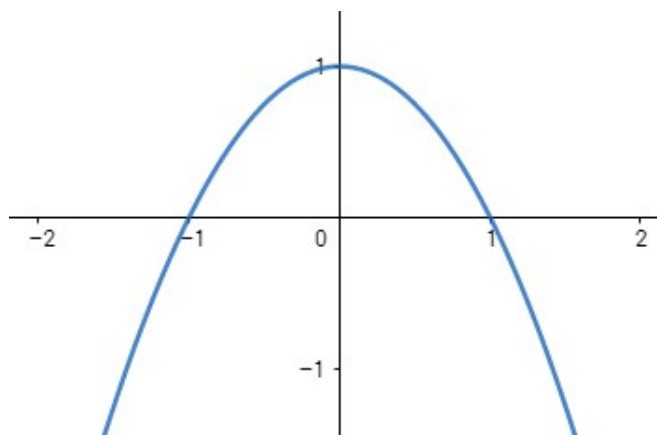
Para resolver exercícios desse tipo, precisamos achar **contra-exemplos** das alternativas a fim de eliminar todas as incorretas e chegar na correta. Assim, por exemplo, vamos considerar a função:

$$f(x) = 1 - x^2$$

Verificamos que essa é uma função válida, pois:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - x^2 = -\infty$$

Porque como x tende a $+\infty$, $-x^2$ tenderá a $-\infty$. Agora, podemos começar a checar as alternativas. Para analisar a alternativa a, precisamos analisar o gráfico da função $f(x)$.





Podemos averiguar, por esse gráfico, que a função $f(x)$ é crescente quando $x < 0$ e decrescente quando $x > 0$.

Então, não podemos afirmar nem que ela é estritamente crescente nem que é estritamente decrescente, porque possui intervalos de crescimento e intervalos de decrescimento.

Logo, a alternativa a é falsa.

Vamos averiguar, então, a alternativa b:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x^2) = +\infty$$

Sabemos que:

$$f(x^2) = 1 - (x^2)^2 = 1 - x^4$$

E assim:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x^2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - x^4 = -\infty$$

Pela mesma justificativa do cálculo do limite referente à $f(x)$, esse limite tenderá a $-\infty$

Portanto, a alternativa b é falsa.

Agora, vamos testar a alternativa c:

$$\forall m \geq 0, \text{ temos } f(x) \leq 0 \text{ se } x \geq m$$

É fácil provar que ela é incorreta, porque tomando, por exemplo



$$m = 0 \text{ e } x = 0$$

Teremos que

$$f(0) = 1 - 0^2 = 1 \geq 0$$

Logo, a alternativa c é falsa.

Então, restamos somente com duas alternativas. Vamos, então, testar a alternativa d:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

Para a função utilizada como exemplo, temos

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - x^2$$

Como x tende a $-\infty$, então x^2 tenderá a $+\infty$ e, por sua vez, $-x^2$ tenderá a $-\infty$. Assim:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

Logo, concluímos que a alternativa d é falsa.

Portanto, a alternativa e está correta.

Resposta esperada: E.