P1 2014.1 FGV Adaptada

Exercício 2a Conceitos de Derivação

Explicação

2.

a. Toda função diferenciável é contínua? Prove ou dê um contra-exemplo.

Vamos retomar a definição de função diferenciável e função contínua:

- Uma função é **contínua** se $\boldsymbol{\lim_{x \to a} f(x) = f(a)}$**;**

- Uma função será **diferenciável** se $\boldsymbol{\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}$ existir.

Vamos utilizar a definição de derivada para chegar na definição de continuidade:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) \ - f(a)}{x - a} = f'(x)$$

Multiplicando os dois lados por $\color{red}{\lim_{x \to a}(x - a)}$:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) \ - f(a)}{x - a} \cdot \color{red}{\lim_{x \to a}(x - a)} \color{black}{= f'(x) \cdot} \color{red}{\lim_{x \to a}(x - a)}$$

Podemos usar a Propriedade do Produto para juntar os dois limites do lado esquerdo:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) \ - f(a)}{x - a}(x - a) = f'(x) \cdot \color{red}{\lim_{x \to a}(x - a)}$$

Simplificando:

$$\lim_{x \to a} \ [f(x) \ - f(a)] = f'(x) \cdot \lim_{x \to a}(x - a)$$

Sabemos que $\lim_{x \to a} (x - a) = 0$, então:

$$\lim_{x \to a} [f(x) - f(a)] = f'(x) \cdot 0 = 0$$

Vamos utilizar esse resultado para chegar na definição de continuidade.

Escrevendo $f(x) = f(a) + f(x) - f(a)$:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} f(a) + f(x) - f(a)$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} f(a) + \lim_{x \to a} [f(x) - f(a)]$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) + 0$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Resposta esperada: demonstração acima.