



www.estudar.com.vc

Cálculo Numérico

Lista de Exercícios

Fuja do Nabo P2 2019.1





Lista de Exercícios

1. MMQ Contínuo

Exercício 1, P2 2018 Adaptado

Aproxime $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ por um polinômio $p(x)$ de grau menor ou igual a dois de forma a minimizar o erro E dado por:

$$E = [f(-1) - p(-1)]^2 + \int_{-1}^1 [f(x) - p(x)]^2 \cdot dx + [f(1) - p(1)]^2$$

2. MMQ Utilizando Polinômios Ortogonais

Exercício 3, P2 2016 Adaptado

Aproxime a função $f(x) = e^{2x} + e^{-2x}$ por um polinômio de grau menor ou igual a três em $[-0,5; 0,5]$ segundo o método de mínimos quadrados em relação ao produto interno $\langle f, g \rangle = \int_{-0,5}^{0,5} f(x)g(x) dx$, fazendo uso dos polinômios que são ortogonais em $[-1,1]$.

Dados:

Polinômios ortogonais: $p_0 = 1, p_1 = t, p_2 = t^2 - \frac{1}{3}, p_3 = t^3 - \frac{3t}{5}$.



Produtos internos: $\langle p_0, p_0 \rangle = 2$, $\langle p_1, p_1 \rangle = \frac{2}{3}$, $\langle p_2, p_2 \rangle = \frac{8}{45}$, $\langle p_3, p_3 \rangle = \frac{8}{175}$.

3. Interpolação Polinomial

Exercício 4, P2 2018 Adaptado

a. Determine A_1, A_2, A_3 e A_4 tal que:

$$p(1,5) = A_1 \cdot p(0) + A_2 \cdot p(1) + A_3 \cdot p(2) + A_4 \cdot p(3)$$

Qualquer que seja o polinômio p de grau menor ou igual a 3.

b. Seja $f(x) = \cos\left(\frac{x}{4}\right)$ e use a expressão:

$$f(1,5) = A_1 \cdot f(0) + A_2 \cdot f(1) + A_3 \cdot f(2) + A_4 \cdot f(3)$$

Para estimar $f(1,5)$ e delimite o erro cometido, de acordo com a estimativa do erro. Use o valor exato de $f(1,5)$ apenas para confirmar sua delimitação de erro.

Dado: Fórmula de erro na interpolação polinomial:

$$|E(x)| \leq \frac{|(x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_n)|}{(n + 1)!} \cdot \max_{z \in I} |f^{n+1}(z)|$$



Para algum z no intervalo em questão.

4. Integração Numérica

Exercício 3, P2 2018 Adaptado

A velocidade de um jato varia com o tempo de acordo com a seguinte expressão:

$$v(t) = u \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - qt}\right) - gt$$

Onde $u = 2 \cdot 10^3 m/s$, $m_0 = 14 \cdot 10^4 kg$, $q = 21 \cdot 10^2 kg/s$ e $g = 9,8 m/s^2$.

Determine a velocidade média do jato no intervalo 0 a 4 s com erro menor que 0,05 m/s, usando o método dos trapézios.

$$\text{Dado: } |E_t| \leq \max|f''(x)| \cdot \frac{(b-a) \cdot h^2}{12}$$

5. Métodos Numéricos em EDOs

Exercício 3, P2 2018 Adaptado

Considere a equação diferencial:

$$x''(t) + t \cdot x'(t) + x(t) = 0$$



$$x(0) = 1$$

$$x'(0) = 0$$

Cuja solução analítica é $x(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$.

- a.** Use o método de Euler com passo $h = 0,5$ para calcular uma aproximação para $x(1)$ (escreva a equação como um sistema de primeira ordem).
- b.** Escolha um método de ordem 2 com $h = 1$ e compare com o resultado obtido no item anterior.



Gabarito

1.

$$p(x) = \frac{15x}{14}$$

2.

$$p(x) = \left(e - \frac{1}{e}\right) + \left(\frac{15e}{2} - \frac{105}{2e}\right) \left(4x^2 - \frac{1}{3}\right)$$

3.

a.

$$\begin{aligned} A_1 = A_4 &= -0,0625 \\ A_2 = A_3 &= 0,5625 \end{aligned}$$

b.

$$f(1,5) \approx 0,930425$$

$$|E(1,5)| \leq 9,15527 \cdot 10^{-5}$$

4.

$$V_m \approx 41,677 \text{ m/s}$$

5.

a.

$$x(1) = 0,75$$

b.

$$x(1) = 0,5$$

Para o Método de Euler normal:



www.estudar.com.vc

$$\Delta x(1) \approx 0,14347$$

Para o Método de Euler Modificado:

$$\Delta x(1) \approx 0,10653$$