www.estudar.com.vc

Resumo e Lista de Exercícios

Cálculo III

Fuja do Nabo P3 2019.1

Resumo

1. Integral de Superfície de Campos Escalares

Dado um campo escalar $f(x, y, z)$ e uma superfície S parametrizada em $S(u, v)$, a integral de superfície desse campo vale:

$$\iint_S f(x, y, z)dS = \iint_R f\big(S(u, v)\big)|X_u \wedge X_v|dudv$$

Na equação acima, X_u e X_v são as derivadas parciais da superfície parametrizada, em relação a u e v:

$$X_u = \frac{\partial}{\partial u}S(u, v), \qquad X_v = \frac{\partial}{\partial v}S(u, v)$$

E $f\big(S(u, v)\big)$ é a função calculada nos parâmetros u e v:

$$f\big(S(u, v)\big) = f\big(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\big)$$

Além disso, R é a região interna à superfície S (ou seja, a superfície é o bordo de R, por vezes escrita como ∂R).

Se houver restrições à superfície, R deve incluir essas restrições (no domínio de integração).

a. Área da Superfície

Dada uma superfície $S = S(u, v)$, a massa da superfície é dada por:

$$\iint_S dS = \iint_R |X_u \wedge X_v| dudv$$

b. Massa da Superfície

Dada uma superfície $S = S(u,v)$, com densidade $\delta(x,y,z)$, a massa da superfície é dada por:

$$\iint_S \delta(x,y,z) dS = \iint_R \delta\big(S(u,v)\big)|X_u \wedge X_v| dudv$$

2. Integral de Superfície de Campos Vetoriais

Dado um campo vetorial $\vec{F} = (A,B,C)$, uma superfície S e sua parametrização $S(u,v)$, calculamos a integral de superfície de $\vec{F}$, sobre a superfície S a partir da fórmula:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_R \vec{F}\big(S(u,v)\big) \cdot (X_u \wedge X_v) dudv$$

Às vezes, a fórmula acima é representada como:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_R A\, dy \wedge dz + B\, dz \wedge dx + C\, dx \wedge dy$$

A região R é definida pelo interior da superfície S e suas restrições, dadas no enunciado.

A superfície deve seguir uma orientação dada pela normal $\vec{n}$. Da expressão acima, temos:

$$\vec{n}\,dS = (X_u \wedge X_v)dudv$$

Ou seja, o termo $X_u \wedge X_v$ representa a normal.

Se o enunciado informa, por exemplo, que $\vec{n} \cdot \hat{\imath} > 0$, então você deve se certificar que a coordenada x é positiva; se $\vec{n} \cdot \hat{\jmath} > 0$, então a coordenada y é positiva, e assim por diante.

Ao aplicar este método, basta seguir a receita:

I. Identificar o campo $\vec{F}$ e a superfície S;
II. Parametrizar a superfície S de acordo com a orientação dada, obtendo $S(u, v)$, com a respectiva região de integração;
III. Calcular $\vec{F}\big(S(u,v)\big)$ e $X_u \wedge X_v$;
IV. Calcular a integral $\iint_R \vec{F}\big(S(u,v)\big) \cdot (X_u \wedge X_v)dudv$ (fazer mudança de coordenadas, se necessário).

Observação: A integral de superfície de um campo vetorial calcula o **fluxo** desse campo na superfície em questão.

3. Teorema da Divergência de Gauss

O Teorema da Divergência de Gauss nos auxilia no cálculo da integral de superfícies.

O teorema é semelhante ao Teorema de Green, mas, em vez de calcular a integral de linha a partir da integral dupla do rotacional, calcula-se uma integral de superfície a partir da integral tripla do divergente.

O Teorema de Gauss diz que:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \iiint_R div\,(\vec{F})dV$$

Na equação acima, S é a superfície em questão e R é a região interior a S ($R = int\ S$). O divergente de $\vec{F} = (A, B, C)$ é calculado como:

$$div\ \vec{F} = \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}$$

Algumas condições devem ser satisfeitas para que esse teorema possa ser utilizado:

I. A orientação deve ser coerente. A orientação definida como coerente é ter normal **externa**, para superfícies externas (normal apontando para fora) e normal **interna**, para superfícies internas (apontando para dentro).

II. A região R deve estar **contida** no domínio de $\vec{F}$ $\left(R \subset dom\ \vec{F}\right)$.

III. A superfície S deve ser **fechada**.

a. Superfície Aberta

Se a superfície S for aberta, deve-se criar uma superfície S_1, corretamente orientada, de forma que:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS + \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \iiint_R div\,(\vec{F})dV$$

Neste caso, R vai ser a região interior à $S \cup S_1$:

$$R = int\ S \cup S_1$$

Se a superfície S tem normal apontando para fora de $S \cup S_1$, a superfície S_1 também deve ter normal apontando para fora. Se S tem normal apontando para dentro de $S \cup S_1$, então S_1 também deve ter normal apontando para dentro.

b. Singularidade
A singularidade é uma região não pertencente ao domínio de $\vec{F}$ mas pertencente a R, tal que R não esteja contido em $dom\ \vec{F}$.

Na presença da singularidade, deve ser criada uma superfície adicional S_2 que "isole" a singularidade (ou seja, a singularidade deve estar dentro da superfície em questão), de forma que, sendo:

$$R' = int\ S \cup ext\ S_2$$

Temos:

$$R' \subset dom\ \vec{F}$$

Ou seja, a região externa à superfície S_2 mas interna à superfície S está contida no domínio de $\vec{F}$.

Neste caso:

$$\iint_{S} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS + \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \iiint_{R'} div\,(\vec{F}) dV$$

Observe que a orientação, neste caso, é diferente:

I. Se S tem normal apontando para fora de R', S_2 deve ter normal apontando para dentro;

II. Se S tem normal apontando para dentro de R', S_2 deve ter normal apontando para fora.

c. Orientação Incorreta
Se, em vez de S ter normal apontando para fora de R, S tem normal apontando para dentro, então o sinal da integral tripla do divergente é trocado:

$$-\iint_{S} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \iiint_{R} div\,(\vec{F}) dV$$

4. Teorema de Stokes

O Teorema de Stokes é um equivalente do Teorema de Green para integrais de linha, mas para quando a curva γ está disposta no espaço, e não apenas em um plano.

O teorema diz que:

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot dr = \iint_{S} rot(\vec{F}) \cdot \vec{n}\, dS$$

A diferença em relação ao Teorema de Green é a presença da normal (quando a curva γ está no plano, a normal é apenas $\hat{k}$).

Assim, a integral de linha se torna uma integral de superfície.

Na equação acima, $\gamma = \partial S$ (a curva γ é o bordo da superfície S). Para que o teorema acima possa ser usado, precisamos que as seguintes condições sejam satisfeitas:

I. A orientação deve ser coerente. A superfície S interna à curva γ deve ter normal apontando conforme a **regra da mão direita**; basta girar a mão no sentido da curva γ, e o polegar aponta no sentido da normal.

II. A superfície S deve estar **contida** no domínio de $\vec{F}$ $\left(S \subset dom\ \vec{F}\right)$. Para isso, o domínio de $\vec{F}$ deve ser **simplesmente conexo** (no $\mathbb{R}^3$, um domínio não simplesmente conexo tem um **eixo** inteiro fora do domínio).

III. A curva γ deve ser **fechada**.

a. Curva Aberta
Se a curva γ não for fechada, precisamos criar uma curva auxiliar γ_1, tal que $\gamma \cup \gamma_1$ forme uma curva fechada. Assim:

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot dr + \int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot dr = \iint_{S} rot(\vec{F}) \cdot \vec{n}\, dS$$

Neste caso, a curva $\gamma \cup \gamma_1$ é o bordo (fronteira) da superfície S:

$$\gamma \cup \gamma_1 = \partial S$$

Por isso, a orientação de γ_1 deve seguir a orientação de γ, e a orientação de S é definida pela regra da mão direita.

b. Domínio Não Simplesmente Conexo
Se o domínio de $\vec{F}$ não conta com um eixo inteiro, ao mesmo tempo em que S passa por esse eixo, então S não está contida em $dom\ \vec{F}$.

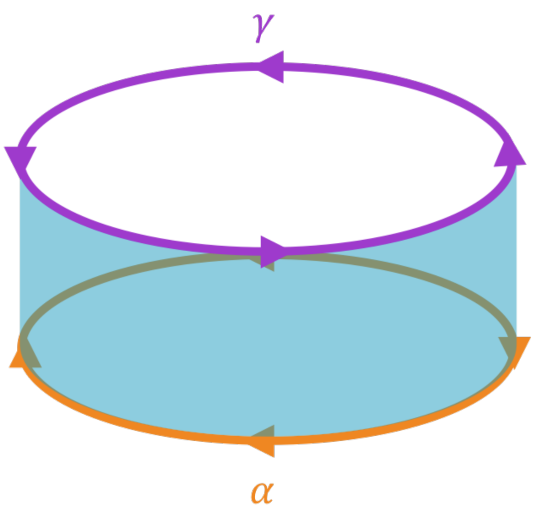
Neste caso, é necessário criar uma curva auxiliar α para que a superfície S não passe pelo eixo em questão, e:

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot dr + \int_\alpha \vec{F} \cdot dr = \iint_S rot(\vec{F}) \cdot \vec{n}\, dS$$

Onde:

$$\gamma \cup \alpha = \partial S$$

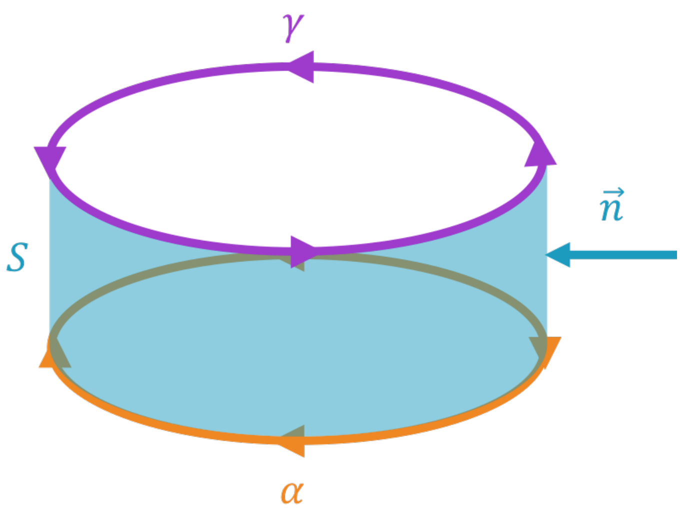
A orientação de α deve ser contrária à orientação de γ. Isso deve ocorrer porque o sentido da normal é encontrado pela regra da mão direita, mas, nesse caso, a mão deve girar passando pelas duas curvas.



Sejam as curvas γ e α acima, tal que α é auxiliar, para que a superfície S (cilindro acima) não passe pelo eixo no centro.

Se γ tem projeção com orientação no sentido anti-horário, então α deve ter projeção com orientação no sentido horário, exatamente como está na figura acima.

Assim, para determinar o sentido da normal à superfície S, basta girar a mão, tangenciando ambas as curvas (no sentido de suas orientações): o polegar acaba apontando para dentro da superfície:



c. Orientação Incorreta

Se a orientação da normal da superfície não for adequada à orientação da curva (regra da mão direita), então a integral encontrada é oposta:

$$-\int_{\gamma} \vec{F} \cdot dr = \iint_{S} rot(\vec{F}) \cdot \vec{n}\, dS$$

Lista de Exercícios

1. Integral de Superfície: Campos Escalares

P3 2018, Exercício 1

Calcule a massa da superfície S de equação:

$$x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$$

E densidade $\delta(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, com $\sqrt{x^2+y^2+z^2} \neq 0$.

2. Integral de Superfície: Campos Vetoriais

P3 2018, Exercício 2

Calcule $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS$, onde $\vec{F}(x,y,z) = (x,0,z)$ e S é a parte do paraboloide $y = x^2 + z^2 + 1$ limitado pelo cilindro $x^2 + z^2 = 16$ e orientado por $\vec{n}$ tal que $\vec{n} \cdot \vec{j} > 0$.

3. Teorema de Gauss

P3 2018, Exercício 3

Seja:

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(\frac{x}{x^2+y^2+1}, \frac{y}{x^2+y^2+1} + e^{x^2}, 1\right)$$

Calcule $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, d\sigma$ onde S é a superfície $z = 2 - \sqrt{x^2+y^2+1} \geq 0$ orientada pela normal unitária $\vec{n}$ tal que $\vec{n} \cdot \vec{k} \geq 0$.

4. Teorema de Gauss

P3 2017, Exercício 2

Sejam:

$$\vec{F}(x,y,z) = \frac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+4z^2)^{3/2}} + (xy^2, yz^2, zx^2)$$

E S é a esfera $x^2+y^2+z^2=1$, orientada com normal unitária $\vec{n}$ exterior à esfera. Calcule $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma$.

5. Teorema de Stokes

P3 2016, Exercício 2

Sejam $\vec{F}(x,y,z) = (2yz, y^3, x+\cos(z^4))$ e γ a intersecção de $z = 9 - x^2 - y^2$ e $y = 1$, percorrida de $\left(-2\sqrt{2}, 1{,}0\right)$ a $\left(2\sqrt{2}, 1{,}0\right)$. Calcule $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$.

6. Teorema de Stokes

P3 2018, Exercício 4

Calcule $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ onde:

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(\frac{-(y-1)}{x^2+(y-1)^2} + z, \frac{x}{x^2+(y-1)^2}, e^{z^3}\right)$$

E γ é a intersecção das superfícies $z = (y-1)^2$ e $x^2 + (y-1)^2 = 1$, orientada de modo que sua projeção no plano xy é percorrida no sentido horário.

Gabarito

1. 2π

2. -256π

3. 4π

4. $\frac{24\pi}{5}$

5. $\frac{64\sqrt{2}}{3}$

6. 2π