



www.estudar.com.vc

Cálculo I

Fuja do Nabo P3 2018.1

Resumo e Lista de Exercícios

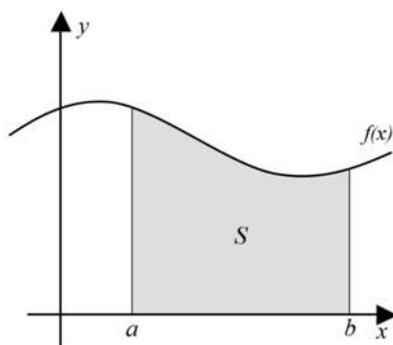




Resumo

1. Noção sobre Integrais

Quando calculamos a integral de uma função $f(x)$ sobre um intervalo $[a, b]$, estamos calculando a área sob o gráfico de $f(x)$ neste intervalo.



Escrevemos isso como:

$$A_S = \int_a^b f(x) dx$$

2. Integrais Imediatas

$$\int dx = x + C$$

$$\int k dx = kx + C, \quad k = cte$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \text{sen}(x) dx = -\text{cos}(x) + C$$



$$\int \cos(x) dx = \text{sen}(x) + C$$

$$\int \sec^2 x dx = \tan(x) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \text{arcsen}(x) + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \text{arctan}(x) + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + C$$

3. Teorema Fundamental do Cálculo

Se $F(x)$ é uma função derivável em $[a, b]$ e $F'(x) = f(x)$, então:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Seja $F(x)$ uma função tal que:

$$F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t) dt$$

O Segundo Teorema Fundamental do Cálculo garante que:



$$F'(x) = f(h(x)) \cdot h'(x) - f(g(x)) \cdot g'(x)$$

4. Técnicas de Integração

a. Substituição

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$$

Onde $u = g(x)$ e $du = g'(x)dx$

b. Integral por Partes

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

c. Frações Parciais

Usamos essa técnica quando queremos integrar uma fração de dois polinômios. Dessa forma, transformamos essa fração em frações mais simples de serem integradas.

d. Substituição Trigonométrica

Nessa técnica, dizemos que x é igual a uma função trigonométrica ($\sin x$, $\tan x$, etc.).

5. Volume de Sólido de Revolução

Considerando o volume gerado pela rotação de uma função $f(x)$ no intervalo $[a, b]$:

a. Ao redor do eixo x

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$



b. Ao redor do eixo y

$$V = 2\pi \int_a^b xf(x)dx$$

6. Comprimento de Gráfico

O comprimento do gráfico de uma função $f(x)$ em um intervalo $[a, b]$ é dado por:

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}$$

7. Integral Imprópria

Caso $x = b$ seja uma assíntota da função:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow b} \int_a^t f(x)dx$$

Caso o intervalo seja infinito:

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x)dx$$

8. Polinômio de Taylor

Polinômio de Taylor é o polinômio de grau n que **melhor aproxima uma função** ao redor de um ponto $x = a$ interior ao seu domínio. Sua definição é a seguinte:

$$P_{n,a}(x) = f(a) + f^{(1)}(a)(x - a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$



ou

$$P_{n,a}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x - a)^k$$

Nessa notação, $f^{(n)}(x)$ denota a derivada de ordem n da função $f(x)$. Além disso, note que n é o grau do Polinômio de Taylor correspondente.

Observações

- a. A função que o Polinômio de Taylor de ordem n pretende aproximar deve ser derivável até ordem n ;
- b. Quanto maior for a ordem do Polinômio de Taylor, maior será a precisão da aproximação.

9. Teorema de Taylor

Resto de Lagrange: é uma função $R(x)$ tal que:

$$R(x) = f(x) - P_{n,a}(x)$$

A função Resto de Lagrange indica a diferença entre a função f e o seu Polinômio de Taylor de ordem n .

Teorema de Taylor: Seja uma função $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, derivável até ordem $(n + 1)$ e $x = a \in I$. O erro ϵ da aproximação da função $f(x)$ usando um Polinômio de Taylor de ordem n ao redor do ponto $x = a$ é tal que:

$$\epsilon = |R(x)| = |f(x) - P_{n,a}(x)|$$

Além disso, pode-se demonstrar que:



$$\epsilon = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1} \right|$$

Nesse caso, o ponto $x = c$ é um ponto que está **entre a e x** .



Exercícios

1. Área entre Gráfico de Funções

P3 2017

Encontre o valor de $m > 0$ para que a área delimitada pela reta $y = mx$ e a parábola $y = x^2 - x$ seja igual a $\frac{2}{3}$.

2. Área entre Gráfico de Funções

P3 2016

Determine a área da região A , dada por:

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x^2, y \geq \frac{x^2}{2}, y \leq 2x \right\}$$

3. Área entre Gráfico de Funções

P3 2018

Calcule

$$\int_{-1}^1 \sqrt[3]{x} + x^{2018} \cdot \sin^3 x \, dx$$

4. Derivada de Funções dadas por Integrais

P3 2018

Qual o valor de $F'(x)$, onde



$$F(x) = \int_0^{x^4} \sin(t^2) dt$$

5. Derivada de Funções dadas por Integrais

P3 2017

Seja $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável tal que $\varphi'(x) = x\varphi(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Seja também $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função duas vezes derivável tal que $\alpha(0) = 1$ e $(\alpha'(0))^2 + \alpha''(0) = 5$. Se $F(x)$ é a função dada abaixo, calcule o valor de $F''(0)$.

$$F(x) = \int_0^{\alpha(x)} \varphi(t) dt$$

6. Derivada de Funções dadas por Integrais

P3 2016

Calcule a derivada de:

$$F(x) = \int_1^{x^2} \sin(x^2) e^{t^2} dt$$

7. Técnicas de Integração: Substituição

P3 2014 (Reoferecimento)

Calcule a seguinte integral indefinida:



$$\int \frac{\arctan(\sqrt{2x})}{(1+2x)\sqrt{2x}} dx$$

8. Técnicas de Integração: Integração por Partes

P3 2016

Calcule a seguinte integral indefinida:

$$\int x \sec^2 x dx$$

9. Técnicas de Integração: Integração por Partes

P3 2017

Calcule a seguinte integral indefinida:

$$\int \cos(2x) \ln(\tan^3 x) dx$$

10. Técnicas de Integração: Frações Parciais

P3 2017

Calcule a seguinte integral indefinida:

$$\int \frac{\sin(2x)}{(\sin(x) - 1)(\sin(x) - 3)} dx$$

11. Técnicas de Integração: Frações Parciais

P3 2012



Calcule a seguinte integral indefinida:

$$\int \frac{4x^2 + 13x + 16}{x^3 + 4x^2 + 8x} dx$$

12. Técnicas de Integração: Substituição Trigonométrica

P3 2017

Calcule a seguinte integral:

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$$

13. Técnicas de Integração: Substituição Trigonométrica

P3 2014

Calcule a seguinte Integral Indefinida:

$$\int \frac{x^5}{\sqrt{(4-x^2)^3}} dx$$

14. Volume de Sólido de Revolução

P3 2017

Seja $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq x \leq 1, e^{-x} \leq y \leq \sqrt{x^2 + 1}\}$. Calcule o volume do sólido obtido rotacionando R ao redor do eixo x .

15. Volume de Sólido de Revolução

P3 2015



Seja $R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \leq y \leq \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right\}$. Calcule o volume do sólido obtido rotacionando R ao redor do eixo y .

16. Comprimento de Gráfico

P3 2017

Calcule o comprimento do gráfico de função $f(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ no intervalo $[0,1]$.

17. Integrais Impróprias

P3 2017

Determine se as seguintes integrais impróprias são convergentes ou divergentes:

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{x^4 + 1} dx$$

18. Polinômio de Taylor

P2 2016

Usando Polinômio de Taylor da função $f(x) = \cos(x)$ em torno de $x_0 = 0$ de menor grau possível, obtenha uma aproximação de $\cos(0,1)$ com erro inferior a 10^{-5} .



19. Polinômio de Taylor

P2 2017

Prove que, para todo $x \geq 1$

$$\left| \arctan x - \frac{\pi}{4} - \frac{x-1}{2} \right| \leq \frac{(x-1)^2}{2}$$



Gabarito

1. $m = \sqrt[3]{4} - 1$

2. $A = 4$

3. 0

4. $4x^3 \sin(x^2)$

5. $F''(0) = 5\varphi(1)$

6. $F'(x) = 2x \cos(x^2) \int_1^{x^2} e^{t^2} dt + 2x \sin(x^2) e^{x^4}$

7. $\frac{(\arctan(\sqrt{2x}))^2}{2} + C, C \in \mathbb{R}$

8. $x \tan x + \ln|\cos x| + C, C \in \mathbb{R}$

9. $\frac{3}{2} \sin(2x) \ln(\tan x) - 3x + C, C \in \mathbb{R}$

10. $-\ln|\sin(x) - 1| + 3 \ln|\sin(x) - 3| + C, C \in \mathbb{R}$

11. $2 \ln|x| + \ln|x^2 + 4x + 8| + \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x+2}{2}\right) + C, C \in \mathbb{R}$

12. $\frac{1}{4} + \frac{\pi}{8}$

13. $\frac{16}{\sqrt{4-x^2}} + 8\sqrt{4-x^2} + \frac{(\sqrt{4-x^2})^3}{3} + C, C \in \mathbb{R}$

14. $\pi \left(\frac{5}{6} + \frac{1}{2e^2} \right)$

15. $V = 2\pi$



16. $l = \frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1)$

17. A primeira integral diverge enquanto a segunda converge para $\frac{\pi}{4}$.

18. $\cos(0,1) \approx 0,5 - \frac{(0,5)^3}{3!} + \frac{(0,5)^5}{5!}$

19. Demonstração.