www.estudar.com.vc

P2 2015 Poli USP Adaptada

Exercício 7b Relação Força e Trabalho (Gráfico)

Explicação

7. Uma partícula de massa m executa um movimento unidimensional e possui energia potencial cuja dependência com a coordenada x é:

$$\boldsymbol{U(x) = \frac{a}{x^2} - \frac{b}{x}}$$

onde a e b são constantes positivas.

b. Faça esboços das funções energia potencial e força como funções da posição da partícula.

Do enunciado temos que: $U(x) = \frac{a}{x^2} - \frac{b}{x}$. Para o esboço do gráfico de $U(x)$ é muito importante **encontrarmos** o(s) ponto(s) de **derivada igual a zero** (pontos em que a força é nula, ou seja, **pontos de equilíbrio**), e os **limites da função** (x tendendo a zero pela esquerda e direita, e tendendo a $+\infty$ e $-\infty$).

Usando a teoria de Limites vista em Cálculo I, como $L'Hospital$ ($L'H$) que você viu para a P2 de Cálculo, teremos:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{a}{x^2} - \frac{b}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{a - bx}{x^2} \overbrace{=}^{L'H} \lim_{x\to-\infty} \frac{-b}{2x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a}{x^2} - \frac{b}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a - bx}{x^2} \overbrace{=}^{L'H} \lim_{x\to+\infty} \frac{-b}{2x} = 0$$

$$\lim_{x\to0^+} \frac{a}{x^2} - \frac{b}{x} = \lim_{x\to0^+} \frac{a - bx}{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to0^-} \frac{a}{x^2} - \frac{b}{x} = \lim_{x\to0^-} \frac{a - bx}{x^2} = +\infty$$

Agora, igualando a expressão de $F(x)$ que calculamos no item **a.** a zero, temos:

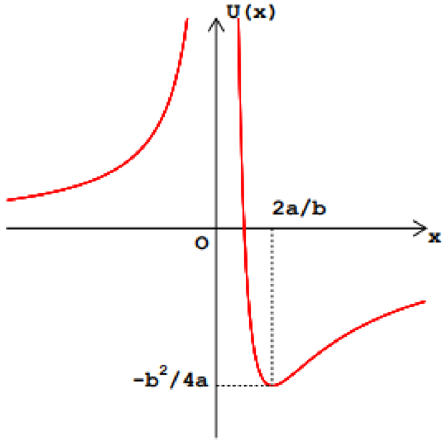
$$F(x) = \frac{2a}{x^3} - \frac{b}{x^2} = 0 \Rightarrow 2a = bx_e \Rightarrow x_e = \frac{2a}{b}$$

Sendo x_e como chamaremos o ponto de equilíbrio. Logo, o valor de $U(x_e)$ é:

$$U(x) = \frac{a}{x^2} - \frac{b}{x} \Rightarrow U(x_e) = \frac{ab^2}{4a^2} - \frac{b \cdot b}{2a} \Rightarrow U(x_e) = -\frac{b^2}{4a}$$

Resumindo, sabemos que $U(x)$ tende a zero indo para $+\infty$ e para o $-\infty$, e que $U(x)$ tende a $+\infty$ quando vai para zero pela direita ou pela esquerda. Também sabemos que o ponto $\frac{2a}{b}$ tem derivada nula. Aliás, se calcularmos a segunda derivada de $U(x)$ em $\frac{2a}{b}$, veremos que ela será positiva, logo $\frac{2a}{b}$ é ponto de **mínimo local**.

Por fim, um esboço do gráfico de $U(x)$ fica:



Vamos repetir o procedimento para o esboço do gráfico de $F(x)$. Porém, já sabemos que $\boldsymbol{x_e}$ é **ponto de equilíbrio**, logo $F(x_e) = 0$.

Fazendo os limites de forma semelhante, temos:

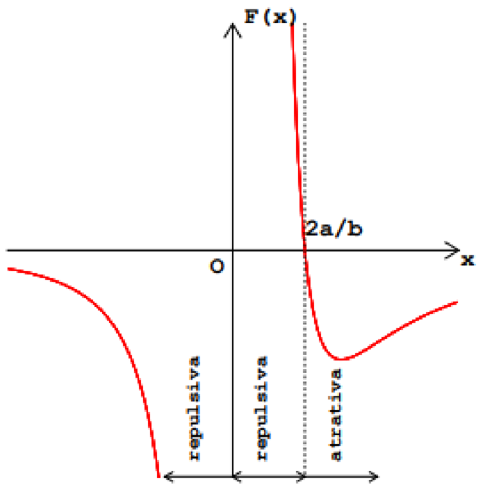
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2a}{x^3}-\frac{b}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2a-bx}{x^3}\overbrace{=}^{L'H}\lim_{x\to-\infty}\frac{-b}{3x}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2a}{x^3}-\frac{b}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2a-bx}{x^3}\overbrace{=}^{L'H}\lim_{x\to+\infty}\frac{-b}{3x}=0$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{2a}{x^3}-\frac{b}{x^2}=\lim_{x\to0^+}\frac{2a-bx}{x^3}=+\infty$$

$$\lim_{x\to0^-}\frac{2a}{x^3}-\frac{b}{x^2}=\lim_{x\to0^-}\frac{2a-bx}{x^3}=-\infty$$

Finalmente, esboçando o gráfico de $F(x)$, teremos:



Os termos utilizados no gráfico (“atrativa” e “repulsiva”) para certas regiões do gráfico servem para explicitar o que ocorre com a partícula nesses pontos em relação a origem. Ou seja, na região chamada “atrativa” a partícula sofrerá uma força que “aponta” para a origem. Porém, nas regiões “repulsivas”, a força resultante na partícula “apontará” no sentido de afastar a partícula da origem.

www.estudar.com.vc

Resposta esperada: Gráficos de $U(x)$ e $F(x)$ construídos na resolução.