www.estudar.com.vc

P2 2017 Poli USP Adaptada

Exercício 3 Sistema de Massa Variável

Explicação

3. Um anão engenheiro sempre teve o sonho de voar em uma espaçonave. Para alcançar seu sonho, o anão desenvolveu um foguete. No entanto, por se tratar de um projeto amador, o foguete não voa, só desliza na horizontal. Para testar o protótipo, o anão empurra o foguete até atingir uma velocidade u, e ativa seu jato, de velocidade relativa ao foguete f, e vazão δ. O teste foi feito em asfalto áspero, então durante o movimento houve força de atrito de coeficiente A. Sabendo que a massa inicial do sistema anão-foguete é M, calcule a função temporal da velocidade ($v(t)$):

A. $v(t) = u - Agt + f \ln\left(\frac{M}{M-\delta t}\right)$

B. $v(t) = u + Agt + f \ln\left(\frac{M}{M-\delta t}\right)$

C. $v(t) = u + Agt + f \ln\left(\frac{M-\delta t}{M}\right)$

D. $v(t) = u + f \ln\left(\frac{M-\delta t}{M}\right)$

E. $v(t) = f \ln\left(\frac{M-\delta t}{M}\right)$

Vamos usar a equação de sistema de massa variável (que é útil decorar):

$$m\frac{dv}{dt} + f\frac{dm}{dt} = F_{ext} \quad (I)$$

Vamos lembrar que esse $\boldsymbol{F_{ext}}$ é a **força externa** exercida no sistema, que no caso do exercício é a **força de atrito** ($\vec{F}_{at}$), a qual pode ser dada, em módulo, por:

$$F_{at} = -A \cdot N \Rightarrow F_{at} = -A \cdot mg \quad (II)$$

Sendo $\boldsymbol{N}$ o módulo da força **normal**, que é **igual ao módulo da força peso** (a força resultante é nula na vertical).

Substituindo a equação (II) em (I) e multiplicando por dt de ambos os lados:

$$m\,dv + f dm = -A\,mg\,dt \Rightarrow dv + f\frac{dm}{m} = -Ag\,dt$$

Observação: A rigor, essa conta não é uma "multiplicação" (só funciona como uma). Na prova, pode fazer essa passagem direto, sem dizer que é uma multiplicação.

Agora vamos aplicar **integrais** nessa equação para **encontrar** o valor de $\boldsymbol{v}$ (na equação temos dv). Para entender melhor os passos da integração sugerimos que veja o curso de Cálculo (na Estudar temos um excelente!).

$$\int_{u}^{v(t)}(dv) + f\int_{M}^{M-\delta t}\left(\frac{dm}{m}\right) = -Ag\int_{t_i=0}^{t}(dt)$$

Nos intervalos de integração, colocamos justamente os casos iniciais (embaixo) e finais (acima) de cada variável. Para dt, colocamos 0 (instante inicial) e t (um instante genérico) no final. Para dv, pomos a velocidade inicial u e a velocidade $v(t)$ naquele instante genérico. No caso de dm, a massa inicial vai ser M. Como a vazão (massa perdida a cada instante) é δ, a massa total naquele instante genérico vai ser $M-\delta t$.

Da teoria de Cálculo, sabemos que: $\begin{cases} \int_{x_1}^{x_2} dx = x_2 - x_1 \\ \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{x} = \ln(x_2) - \ln(x_1) \end{cases}$.

Fazendo isso para nossa equação, teremos:

$$v(t) - u + f\,[\ln(M-\delta t) - \ln(M)] = -Ag(t-0)$$

Fazendo a **propriedade** de **logaritmos**: $\ln(x_2) - \ln(x_1) = \ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right) = -\ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right)$

$$v(t) = u - Agt - f\ln\left(\frac{M - \delta t}{M}\right)$$

$$v(t) = u - Agt + f\ln\left(\frac{M}{M - \delta t}\right)$$

Resposta esperada: Alternativa A.