www.estudar.com.vc

Dinâmica de Corpo Rígido

Relações da Segunda Lei

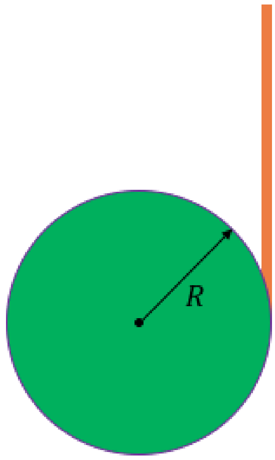
Explicação

Nessa aula iremos aprender como relacionar a Segunda Lei de Newton do centro de massa com a Segunda Lei aplicada em rotações:

$$\vec{F}_r = m\vec{a}_{CM}$$

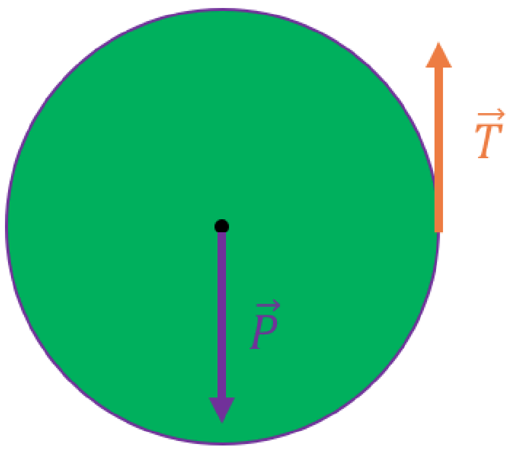
$$\vec{\tau}_{ext} = I_{CM}\vec{\alpha}$$

Para isso, vamos imaginar o problema do ioiô abaixo:

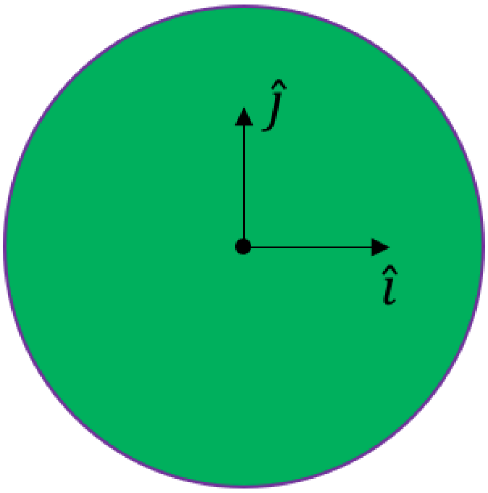


Ele será considerado um disco homogêneo de massa m e raio R. Vamos buscar a aceleração do centro de massa dele ($\vec{a}_{CM}$).

Para isso, vamos fazer o diagrama de forças dele. Há uma tração aplicada em sua ponta e a força peso apontando para baixo.



Agora vamos adotar o seguinte sistema de coordenadas cartesiano:



Com isso, temos que a força peso é $\vec{P} = -mg\,\hat{\jmath}$ e a de tração é $\vec{T} = T\,\hat{\jmath}$. A aceleração do centro de massa do ioiô é vertical, pois só há forças atuando nessa direção. Dessa forma, a Segunda Lei de Newton do centro de massa fica:

$$(T - mg)\hat{\jmath} = (-ma_{CM})\hat{\jmath} \quad (I)$$

Sendo $\vec{a}_{CM} = -a_{CM}\,\hat{\jmath}$. O sinal é negativo porque o disco acelera para baixo.

Agora precisamos de outra relação para substituir a tração. Podemos aplicar a Segunda Lei de Newton para rotações usando o centro de massa do disco como polo.

Nesse polo, a única força que aplica torque é a de tração, pois o peso é aplicado diretamente no centro de massa. Assim, temos a relação de torque:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{T}$$

Pela figura, sabemos que $\vec{r}$ é um vetor que liga o polo ao ponto de aplicação da força de tração. Ele tem o tamanho do raio do disco. Assim $\vec{r} = R\,\hat{\imath}$.

Dessa forma, o torque externo da força de tração é:

$$\vec{\tau}_{ext} = (R\hat{\imath}) \times (T\hat{\jmath})$$

$$\vec{\tau}_{ext} = TR\,\hat{k}$$

Vamos lembrar que o momento de inércia de um disco em relação a um eixo que passa pelo centro de massa da situação é:

$$I_{CM} = \frac{mR^2}{2}$$

Vamos também dizer que a rotação ocorre no plano dessa tela. Assim ela terá direção do versor $\hat{k}$. Dessa forma a aceleração angular será $\vec{\alpha} = \alpha\hat{k}$. Aplicando tudo isso na Segunda Lei de rotações, temos:

$$(TR)\,\hat{k} = \left(\frac{mR^2}{2}\alpha\right)\hat{k} \quad (II)$$

Se usarmos apenas os escalares das equações (I) e (II), vamos ter duas equações.

$$\begin{cases} TR = \dfrac{mR^2}{2}\alpha \\ T - mg = -ma_{CM} \end{cases}$$

Agora precisamos de uma relação entre a aceleração angular e a aceleração do centro de massa. Para isso, podemos considerar que o disco rola sem deslizar no fio. Dessa forma, temos a relação:

$$a_{CM} = \alpha R$$

Assim, podemos substituir na equação:

$$\begin{cases} T = \dfrac{m a_{CM}}{2} \\ T - mg = -m a_{CM} \end{cases}$$

Subtraindo as duas equações, vamos ter:

$$\frac{3}{2} a_{CM} = -mg$$

Assim, temos por fim:

$$a_{CM} = -\frac{2mg}{3}$$

Em termos vetoriais, lembrando que $\vec{a}_{CM} = a_{CM}\,\hat{j}$.

$$\vec{a}_{CM} = -\frac{2mg}{3}\,\hat{j}$$