www.estudar.com.vc

Resumo e Lista de Exercícios

Física III

Fuja do Nabo P3 2019.1

Resumo

1. Lei de Faraday-Lenz

A última Lei do eletromagnetismo vista nesse curso é a Lei de Faraday-Lenz. Essa Lei tem um princípio parecido com a Lei de Ampère-Maxwell e a corrente de deslocamento, mas agora dizemos que a variação no fluxo magnético negativa produz um campo elétrico circulante. Podemos dizer que:

$$\oint_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Por mais que pareça a mesma coisa de sempre, devemos lembrar que a integral na esquerda da igualdade era igual à diferença de potencial.

Isso significa que a variação negativa no fluxo magnético induz uma força eletromotriz ($\boldsymbol{\varepsilon}$) que produz corrente em um condutor fechado (espira). Ou seja:

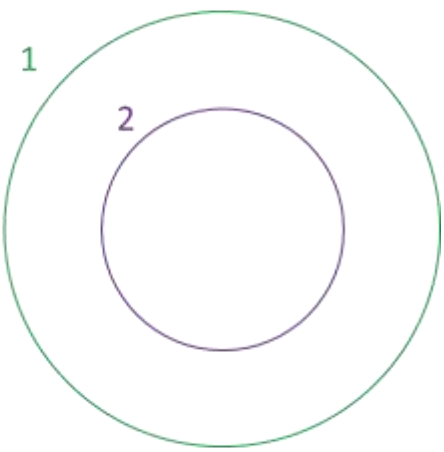
$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Devemos enfatizar o sinal negativo que vem da Lei de Lenz. Ela nos diz que a corrente induzida se opõe à variação do fluxo magnético. Se, por exemplo, o fluxo aumentar, a corrente que passa pela espira em questão produzirá um campo magnético que irá se opor a esse aumento.

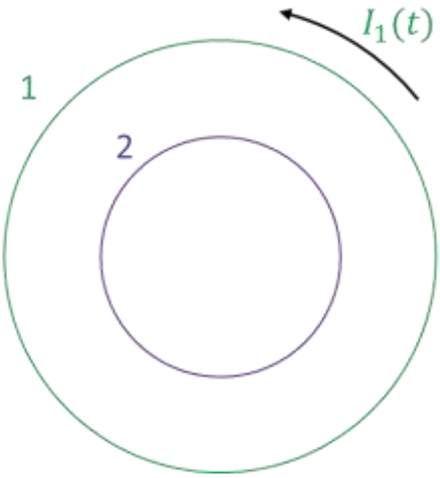
Uma forma fácil de saber o sentido da corrente induzida é pela circuitação. Primeiro, você adota o circuito γ tendo o formato da espira e adota um sentido para esse circuito (horário ou anti-horário). Se nas contas aparecer $\varepsilon > 0$, significa que o sentido adotado de circuito é o da corrente. Caso $\varepsilon < 0$, então o sentido é oposto. Use a mesma regra para o vetor área.

2. Indutância

Em indutância, estudamos os efeitos da Lei de Faraday-Lenz em solenoides devido ao efeito único de variação de corrente. Primeiramente, vamos falar de indutância mútua e, para isso, imagine dois solenoides com N_1 e N_2 voltas e que seus eixos de simetria sejam concêntricos.



Inicialmente, não há corrente em nenhum dos dois. Imagine que no solenoide 1 surja uma corrente variando no tempo $I_1(t)$.



Essa corrente irá gerar um fluxo magnético variável no solenoide 2, de forma que apareça uma corrente induzida.

A ideia da indutância mútua é relacionar a *f.e.m* induzida no solenoide 2 pelo 1 com a variação temporal da corrente em 1. Para isso, definimos a indutância mútua, dada por:

$$M = \frac{N_2 \Phi_2}{I_1}$$

Na verdade, a indutância mútua (M) é apenas uma constante de proporcionalidade entre Φ_2 (fluxo magnético total no solenoide 2) e a corrente que gera esse fluxo ($I_1(t)$), de forma que M seja uma constante.

E a *f.e.m* induzida em 2 será:

$$\varepsilon_2 = -M \frac{dI_1}{dt}$$

Repare que adotamos arbitrariamente que a corrente apareceria em 1. Poderia ser que a corrente aparecesse em 2. A indutância mútua, nesse caso, é a mesma, ou seja:

$$M = \frac{N_2\Phi_2}{I_1} = \frac{N_1\Phi_1}{I_2}$$

Além da indutância mútua, também temos o efeito de auto-indução. Esse fenômeno ocorre quando a corrente de um solenoide muda, de forma que o campo magnético gerado por esse solenoide também mude. Isso tudo resulta em uma variação do fluxo magnético e, consequentemente, em uma *f.e.m* auto-induzida.

A auto-indutância (L) é calculada por:

$$L = \frac{N\Phi}{I}$$

Em que N é o número de voltas do solenoide, Φ é o fluxo magnético de uma única volta do solenoide e I é a corrente variável que passa pelo solenoide.

A *f.e.m* auto-induzida é:

$$\varepsilon = -L\frac{dI}{dt}$$

E antes de passar para os exercícios de fixação, assim como tínhamos a densidade de energia elétrica, também temos a densidade de energia magnética, dada por:

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

E a energia em um indutor é do tipo:

$$E = \frac{LI^2}{2}$$

Observação: Solenoide, como descrito nesse resumo, pode ser tanto o cilíndrico, quanto o toroidal ou até mesmo um plano, com $N = 1$ (exemplo: anel).

3. Corrente de Deslocamento

Primeiramente, vamos lembrar a Lei de Ampère. Ela era a seguinte equação:

$$\oint_\gamma \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_c$$

Em que $\vec{B}$ é o vetor campo magnético, γ é o Circuito de Ampère adotado, μ_0 é a permeabilidade magnética no vácuo ($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} T \cdot m/A$) e I_c é a corrente que passa internamente pelo Circuito de Ampère adotado.

O que acontece é que essa equação está incompleta nessa forma escrita. Foi então que, no desenvolvimento da teoria do eletromagnetismo, Maxwell introduziu a corrente de deslocamento, dada por:

$$I_d = \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

E, assim, a Lei de Ampère-Maxwell na sua forma geral e completa fica:

$$\oint_\gamma \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_c + \mu_0 \underbrace{\varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}}_{I_d}$$

Lembrando que ε_0 é a permissividade elétrica no vácuo.

O que precisamos entender agora é o que é Φ_E, que é chamado de fluxo elétrico. Em suma, ele é o produto escalar entre o vetor área $\vec{\boldsymbol{A}}$ e o vetor campo elétrico $\vec{\boldsymbol{E}}$. De maneira geral, o fluxo elétrico é:

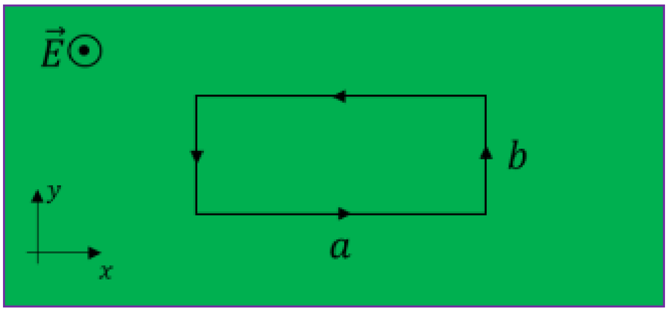
$$\Phi_E = \int \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

A área usada é a área referente à superfície do Circuito de Ampère que é adotado na Lei de Ampère-Maxwell. A direção é perpendicular à superfície e o sentido é indicado pela regra da mão direita, basta girar a mão no sentido adotado no Circuito.

Vamos ver alguns exemplos de cálculo de Φ_E.

a. Campo Elétrico Homogêneo e Área Total

Na imagem abaixo, o campo elétrico $\vec{E}$ é uniforme na região em verde, e é dado por $\vec{E} = E\hat{k}$.



O Circuito de Ampère adotado é o retângulo com sentido anti-horário. Nesse caso, o vetor área desse circuito é:

$$\vec{A} = ab\hat{k}$$

Como o campo elétrico é homogêneo e ele está distribuído em toda a área do circuito, o fluxo vira:

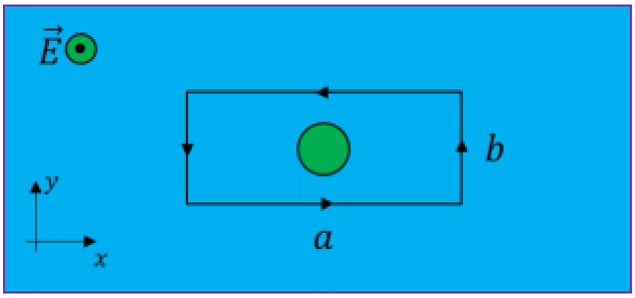
$$\Phi_E = (E\hat{k}) \cdot (ab\hat{k})$$

$$\Phi_E = Eab$$

Observação: Caso o sentido do circuito fosse horário, o vetor área seria do tipo $-ab\hat{k}$*, e o fluxo seria negativo.*

b. Campo Elétrico Homogêneo e Área Parcial

Agora imagine que o campo elétrico $\vec{E} = E\hat{k}$, também homogêneo, é concentrado em uma área circular de raio c (Circunferência C) interna ao retângulo.



Nesse caso, como o campo elétrico é aplicado em uma pequena região, quando fizermos a integral:

$$\Phi_E = \int \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

Na região em que não atua campo elétrico $(\vec{E} = \vec{0})$, teríamos o equivalente a:

$$\Phi_E = \int \vec{0} \cdot d\vec{A}$$

E na região total do retângulo R, a gente teria:

$$\Phi_E = \int_{R-C} \vec{0} \cdot d\vec{A} + \int_{C} \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

Basicamente o que queremos dizer é: para ter fluxo elétrico, precisa ter campo elétrico, ou seja, as regiões que possuem campo elétrico nulo não contribuem para o fluxo elétrico. Então caso o campo elétrico esteja concentrado em uma região, use apenas a área efetiva dessa região (e não a do circuito todo).

Temos, então, que $\vec{A} = \pi c^2 \hat{k}$ e $\vec{E} = E\hat{k}$, de forma que:

$$\Phi_E = E\pi c^2$$

c. Campo Elétrico Variável

Usando a mesma imagem do exemplo a, agora imagine que o campo elétrico atuante nessa região seja do tipo $\vec{E} = \alpha y$ e que a base inferior do circuito comece em $y = 0$.

Como aqui temos um campo variável, precisamos integrar. Usaremos a diferencial de área $d\vec{A} = (ady)\hat{k}$ (lembrando que a direção e sentido são dados pela regra da mão direita) para fazer a integral:

$$\Phi_E = \int \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

Dessa forma, ficamos com:

$$\Phi_E = \int (\alpha y \hat{k}) \cdot \left(ady\hat{k}\right)$$

E essa integral vira:

$$\Phi_E = \alpha a \int_0^b y dy$$

E, por fim:

$$\Phi_E = \frac{\alpha a b^2}{2}$$

Uma coisa que devemos reparar na Lei de Ampère-Maxwell que a gente enunciou:

$$\oint_\gamma \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_c + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

O que gera campo magnético circulante é a corrente elétrica e a variação do fluxo elétrico. Então, apenas ter um fluxo elétrico propriamente dito, não implica em muita coisa, apenas no fato de que ele está lá. Agora, caso ele varie no tempo, aí podemos afirmar que há o campo magnético circulante igual ao da corrente.

4. Equações de Maxwell

A tabela abaixo contém todas as 4 Equações de Maxwell na forma diferencial e integral. A maior parte do curso foca na intuição da forma integral, mas alguns exercícios cobram o uso da diferencial.

Lei	Forma Integral	Forma Diferencial
Gauss ($\vec{E}$)	$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$
Gauss ($\vec{B}$)	$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
Ampère-Maxwell	$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \Phi_E}{\partial t}$	$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$
Faraday-Lenz	$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t}$	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Não se esqueça de lembrar o que é o operador rotacional ($\vec{\nabla}\times$) e o operador divergente ($\vec{\nabla}\cdot$). O rotacional de um campo vetorial $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$ é:

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

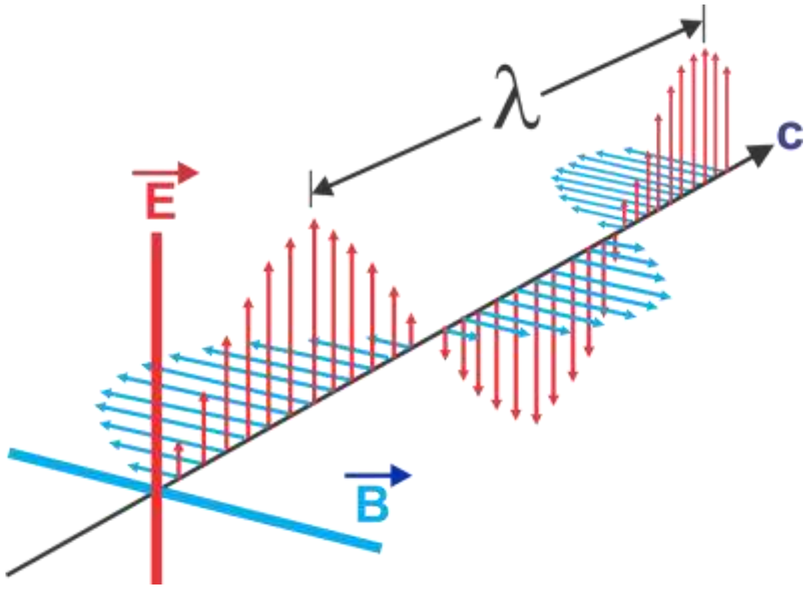
Enquanto o divergente desse campo é:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

5. Ondas Eletromagnéticas

Aqui é o momento em que se mata saudades de Física II. As ondas eletromagnéticas são uma solução da natureza da luz que, até hoje, é utilizada (em conjunto com o conceito de fótons).

Essas ondas são compostas por campo elétrico e campo magnético, que ficam sempre ortogonais. Um esquema dessa onda pode ser visto abaixo:



Com as Equações de Maxwell, pôde-se calcular teoricamente, pela primeira vez, a velocidade da luz, com a seguinte relação:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

E esse valor se aproxima de $c = 3 \cdot 10^8\ m/s$ (faça a conta, usando $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ T \cdot m/A$ e $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ F/m$).

O que vamos ver agora são algumas relações nas ondas eletromagnéticas.

A relação escalar entre o campo elétrico $\boldsymbol{E}$ e o magnético $\boldsymbol{B}$ é:

$$E = cB$$

O sentido de propagação da onda é dado por:

$$\vec{E} \times \vec{B}$$

A onda eletromagnética pode ser descrita por ondas harmônicas de campo elétrico e magnético (em vetor). Um exemplo é:

$$\vec{E}(x,t) = E_0 \cos(kx - \omega t + \delta)\,\hat{\jmath}$$

$$\vec{B}(x,t) = B_0 \cos(kx - \omega t + \delta)\,\hat{k}$$

Em que a onda se propaga na direção positiva de x com velocidade $\frac{\omega}{k}$. A relação entre as duas é dada pelas fórmulas acima. Caso queira relembrar o equacionamento desse tipo de onda, veja o resumo sobre ondas. Sugiro ler as partes de onda progressiva, onda harmônica e onda estacionária.

O último tópico a ser abordado é o Vetor de Poynting. Ele é definido como vetor de fluxo de energia, isto é, ele aponta na direção da propagação da onda eletromagnética e é a intensidade instantânea da onda. Ele é dado por:

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}$$

Ele é um fluxo de energia por unidade de tempo e área. Na maioria das vezes, devido à alta frequência das ondas eletromagnéticas, calculamos a média do módulo do vetor de Poynting para obter intensidade média.

$$I = < S >$$

Sendo que a notação de $< f >$ é denominada média da grandeza f. Para ondas senoidais ou cossenoidais, o valor médio é conhecido e dado por:

$$I = \frac{EB}{2\mu_0}$$

E se ainda substituirmos B por $\frac{E}{c}$ e $\mu_0 = \frac{1}{c^2 \varepsilon_0}$, temos:

$$I = \frac{\varepsilon_0 c E_0^2}{2}$$

Todas as médias de funções relevantes serão fornecidas no formulário.

Observação: no exemplo das ondas harmônicas, sabemos que a propagação ocorre em x positivo porque era a coordenada descrita na equação $y(x, y, z, t)$. Outras coordenadas, como y e z também poderiam ser usadas, caso a propagação ocorresse em algum dos outros dois eixos. Em propagação 3D, ao invés de número de onda k, usamos o vetor de onda $\vec{k} = k_x\hat{\imath} + k_y\hat{\jmath} + k_z\hat{k}$ e o vetor posição $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$, e a equação de onda ficaria:

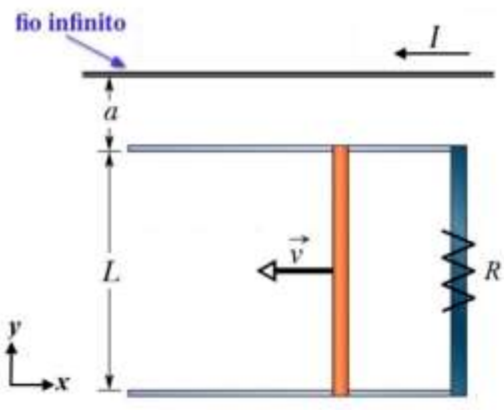
$$y(x, y, z, t) = A\cos\left(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta\right)$$

Lista de Exercícios

1. Lei de Faraday-Lenz

Exercício 1, P3 2018

Uma barra condutora vertical de comprimento L sob a ação de uma força externa $\vec{F}_{ext}$ se move na horizontal, com velocidade constante $\vec{v} = -v\hat{\imath}$, deslizando sem atrito sobre 2 condutores paralelos fixos, formando um circuito fechado com uma terceira barra fixa de resistência R. Simultaneamente, um fio horizontal infinito está paralelo aos dois condutores e a uma distância a do condutor mais próximo. Por este fio passa uma corrente constante I no sentido negativo do eixo x. Sabendo que o módulo do campo magnético produzido por um fio com corrente I a uma distância r é dado por $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$, determine:



a. O módulo da força eletromotriz induzida no circuito.

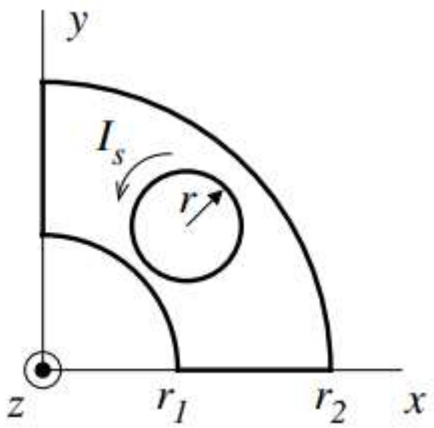
b. O sentido da corrente induzida no circuito e justifique sua resposta.

c. Determine o vetor força externa $\vec{F}_{ext}$, em termos dos parâmetros geométricos do problema e demais dados do enunciado.

2. Lei de Faraday-Lenz e Indutância Mútua

Exercício 1, P3 2017

Um circuito com resistência R, contido no plano xy, é constituído por dois arcos de circunferência com raios r_1 e r_2 e por dois segmentos retos. Este circuito envolve um solenoide muito longo, com eixo paralelo ao eixo z, n espiras por unidade de comprimento e raio r tal que $2r < r_2 - r_1$, conforme a figura. Pelo solenoide passa uma corrente I_s que flui no sentido anti-horário. I_s cresce com o tempo com taxa $\beta = \frac{dI_s}{dt} > 0$. Desprezando efeitos de borda, a intensidade do campo magnético no interior do solenoide é $B = \mu_0 n I_s$.



a. Calcule o fluxo do campo do solenoide através do circuito.

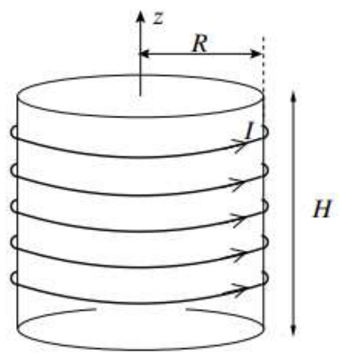
b. Calcule o coeficiente de mútua indutância entre o solenoide e o circuito.

c. Calcule o sentido (horário ou anti-horário) e a magnitude da corrente I induzida no circuito.

3. Auto-Indutância

Exercício 2 Parte I, P3 2018

Considere um solenoide ideal de N espiras, raio R e comprimento $H \gg R$, transportando uma corrente I no sentido indicado pela figura abaixo. O campo magnético em seu interior é dado por $\vec{B} = \frac{\mu_0 NI}{H}\hat{z}$.

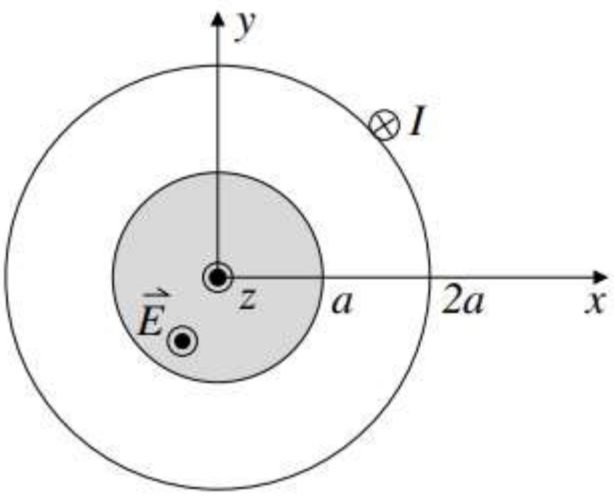


a. Determine a auto-indutância do solenoide.
b. Considere agora a corrente elétrica variável no tempo $I(t) = at$, sendo $a > 0$ uma constante. Determine o vetor campo elétrico induzido nas regiões $r < R$ (dentro do solenoide) e $r > R$ (fora do solenoide).

4. Corrente de Deslocamento

Exercício 2, P3 2017

Em uma casca cilíndrica de comprimento infinito, raio $2a$ e coaxial com o eixo z, passa uma corrente I, uniformemente distribuída, que flui no sentido de z negativo. No interior desta casca cilíndrica existe uma região cilíndrica (região cinza na figura) também de comprimento infinito, raio a e coaxial com o eixo z onde há um campo elétrico uniforme $\vec{E}(t) = Kt\hat{k}$, onde K é uma constante positiva e t é o tempo.

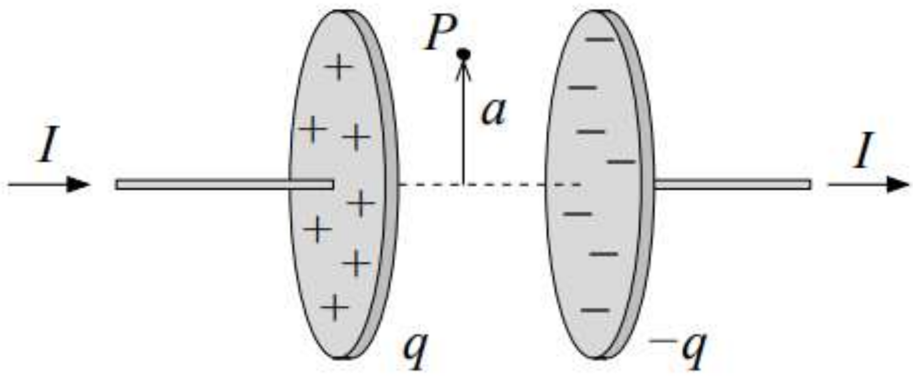


a. Desconsiderando a casca cilíndrica por onde passa corrente, calcule o vetor campo magnético em todo o espaço (regiões $r < a$ e $r > a$, onde r é distância ao eixo z).
b. Determine o vetor campo magnético devido somente à corrente que passa pela casca cilíndrica em todo o espaço.
c. Calcule o valor da corrente I para que o campo magnético seja nulo para $r > 2a$.

5. Corrente de Deslocamento e Equações de Maxwell

Exercício 2, P3 2016

a. Um capacitor de placas paralelas circulares, no vácuo, está sendo carregado, como indica a figura abaixo. As placas têm raio R e a corrente de condução nos fios no instante t é igual a $I(t)$.



Calcule o campo magnético no ponto P a uma distância $a < R$ do eixo do capacitor, conforme a figura.

Dado: o campo elétrico dentro do capacitor é $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$, onde σ é a densidade superficial de carga.

b. O campo elétrico de uma onda que se propaga no vácuo é dado por $\vec{E} = E_0 e^{-\alpha(x-ct)^2}\hat{\jmath}$, onde a constante $\alpha > 0$. Use a lei de Faraday, $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, para calcular o campo vetorial $\vec{B}$ desta onda.

6. Equações de Maxwell

Exercício 2 Parte 2, P3 2018

Considere um sistema cujos vetores campo elétrico e magnético são dados por $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z) = (hx + pxyt, 0,0)$ e $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z) = (ay, 0, bxt^2)$, respectivamente onde h, p, a, b são constantes e (x, y, z) denotam coordenadas cartesianas. Usando as equações de Maxwell, determine:

a. A densidade de carga do sistema.
b. O vetor densidade de corrente $\vec{J}$ do sistema.

7. Ondas Eletromagnéticas

Exercício 3, P3 2018

O campo magnético de uma onda eletromagnética se propagando no vácuo é dado por $\vec{B} = B_0 \sin[k(x + ct)]\,\hat{z}$. Expresse suas respostas apenas em termos de dados do problema e constantes universais.

a. Determine o vetor campo elétrico desta onda. Justifique sua resposta por meio de um esquema gráfico dos vetores pertinentes.
b. Determine o vetor de Poynting desta onda.
c. Determine a energia total transportada pela radiação através de uma área A perpendicular à frente de onda durante um intervalo de tempo igual a 4 vezes o período da onda.

8. Ondas Eletromagnéticas

Exercício 3, P3 2016

Uma onda eletromagnética plana monocromática de comprimento de onda λ propaga-se no vácuo no sentido positivo do eixo z. Seu campo elétrico oscila na direção x e sua amplitude assume metade do seu valor máximo E_0 na origem do sistema de coordenadas no instante $t = 0$. Nos itens a e b abaixo, expresse suas respostas em termos de E_0, c, μ_0 e λ.

a. Escreva as expressões dos vetores campo elétrico e campo magnético associados a esta onda.

b. Calcule o vetor de Poynting.

c. No instante $t = 0$, um elétron de carga q_e está passando pela origem do sistema de coordenadas com velocidade $c/2$, na direção e sentido do eixo z. Calcule o vetor força que age sobre o elétron em $t = 0$ devido a essa onda.

Gabarito

1.

a. $|\varepsilon_{ind}| = \frac{\mu_0 I v}{2\pi} \ln\left(\frac{a+L}{a}\right)$

b. Sentido horário

c. $\vec{F}_m = \frac{\mu_0^2 I^2 v}{4\pi^2 R}\left[\ln\left(\frac{a+L}{a}\right)\right]^2$, para a esquerda

2.

a. $\Phi_m = \mu_0 n I \pi r^2$

b. $M = \mu_0 n \pi r^2$

c. $I = \frac{\mu_0 n \beta \pi r^2}{R}$, no sentido horário

3.

a. $L = \frac{\mu_0 N^2 \pi R^2}{H}$

b. $\vec{E}(r) = -\frac{\mu_0 N}{2H} a r \hat{\varphi}$ (dentro do solenoide), $\vec{E}(r) = -\frac{\mu_0 N R^2}{2Hr} a \hat{\varphi}$ (fora do solenoide)

4.

a. $\vec{B}(r) = \begin{cases} \frac{\mu_0 \varepsilon_0 K r}{2} \hat{\theta}, para\ r < a \\ \frac{\mu_0 \varepsilon_0 K a^2}{2r} \hat{\theta}, para\ r > a \end{cases}$

b. $\vec{B}(r) = \begin{cases} \vec{0}, para\ r < 2a \\ -\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\theta}, para\ r > 2a \end{cases}$

c. $I = \varepsilon_0 K a^2 \pi$

5.

a. $B = \frac{\mu_0 a I}{2\pi R^2}$

b. $\vec{B} = \frac{E_0}{c} e^{-\alpha(x-ct)^2}\hat{k}$

6.

a. $\rho = \varepsilon_0(h + pyt)$

b. $\vec{J} = \left(-\varepsilon_0 pxy, -\frac{bt^2}{\mu_0}, -\frac{a}{\mu_0}\right)$

7.

a. $\vec{E} = -cB_0 \sin[k(x + ct)]\,\hat{j}$

b. $\vec{S} = -\frac{cB_0^2}{\mu_0}\sin^2[k(x + ct)]\,\hat{\imath}$

c. $U = \frac{4\pi A B_0^2}{\mu_0 k}$

8.

a. $\vec{E} = E_0 \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(z - ct) + \frac{\pi}{3}\right]\hat{\imath}$ e $\vec{B} = \frac{E_0}{c}\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(z - ct) + \frac{\pi}{3}\right]\hat{j}$

b. $\vec{S} = \frac{E_0^2}{c\mu_0}\cos^2\left[\frac{2\pi}{\lambda}(z - ct) + \frac{\pi}{3}\right]\hat{k}$

c. $\vec{F} = \frac{q_e E_0}{4}\hat{\imath}$