www.estudar.com.vc

Dinâmica de Rotações

Segunda Lei de Newton para Rotações

Explicação

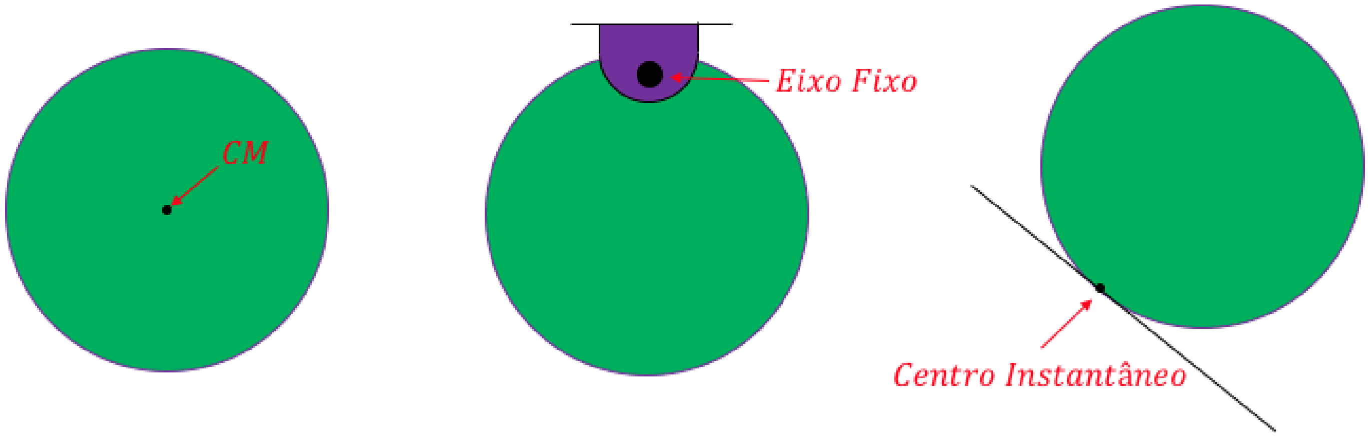
Já sabemos que em um sistema, a Segunda Lei de Newton tem forma:

$$\vec{F}_r = m \cdot \vec{a}_{CM}$$

Sendo que $\vec{a}_{CM}$ é a aceleração do centro de massa. Temos um análogo para mecânica de rotações. Chamaremos de $\vec{\tau}_{ext}$ a soma de todos os torques externos em relação a um polo, de um sistema. Chamando de $\vec{L}$ o vetor momento angular total do sistema em relação ao mesmo polo, vamos ter a Segunda Lei geral para rotações:

$$\boxed{\vec{\tau}_{ext} = \frac{d\vec{L}}{dt}}$$

Dificilmente a gente vai usar essa forma da segunda lei. A gente adota **centro de massa** ou **centros de rotação** (fixos ou instantâneos) como polo. Alguns exemplos estão indicados abaixo:

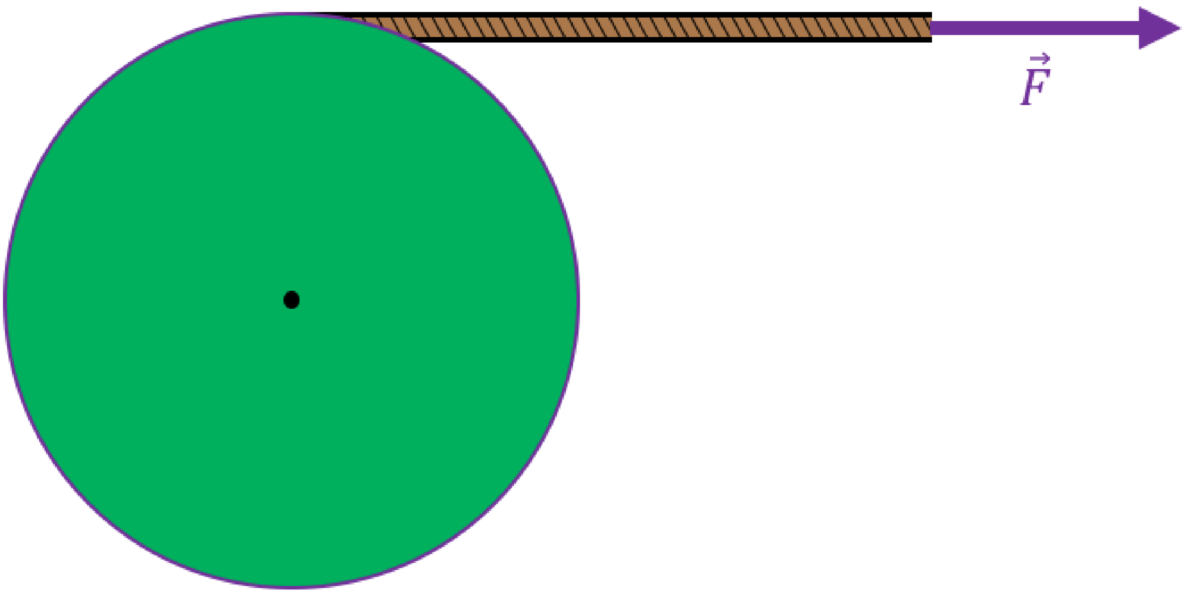


Nessas situações, vamos ter que a Segunda Lei de Newton será:

$$\boxed{\vec{\tau}_{ext} = I\vec{\alpha}}$$

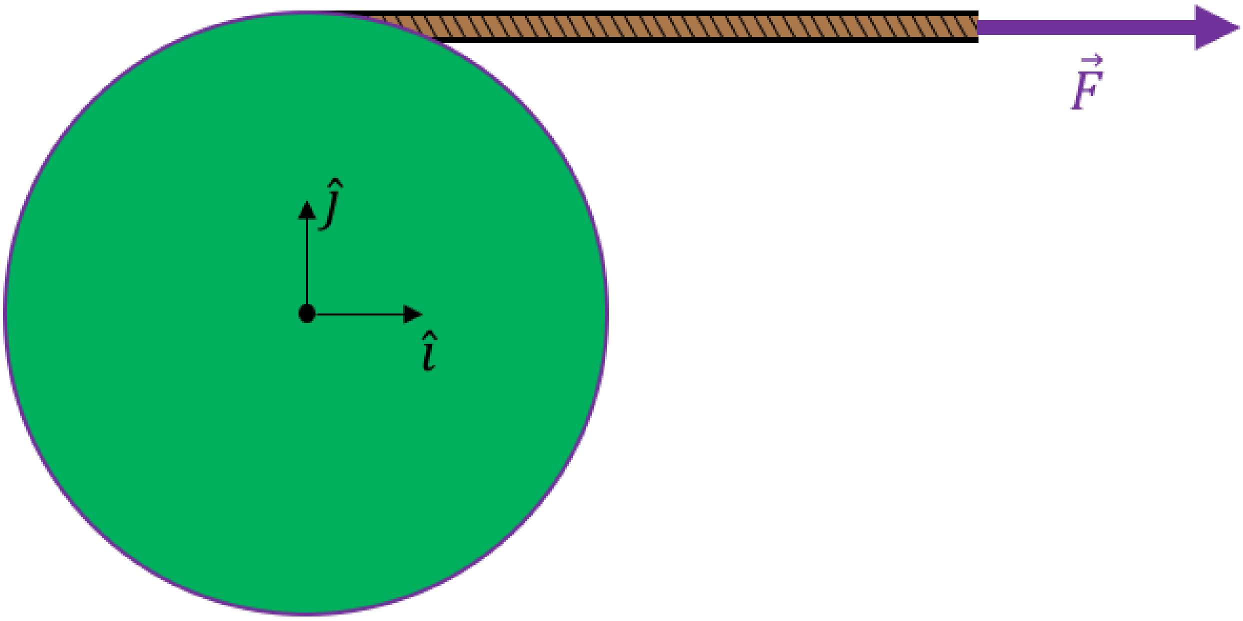
Sendo I o momento de inércia em relação à um desses polos, $\vec{\tau}_{ext}$ o torque externo em relação a esse polo, e $\vec{\alpha}$, o vetor aceleração angular.

Agora vamos ver um exemplo. Veja o disco homogêneo de $2\ kg$ abaixo sendo puxado por um fio ideal. O disco está preso em seu centro:



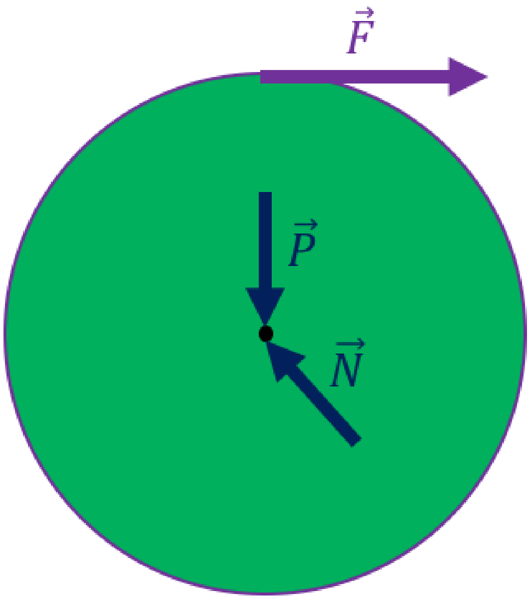
A força $\vec{F}$ tem intensidade de $2\ N$, e o disco tem raio $1\ m$. Dessa forma, vamos calcular a aceleração angular desse disco a partir da Segunda Lei de Newton de rotações.

Primeiro, vamos adotar um sistema de coordenadas. Vamos colocar a origem no centro do disco e versores $\hat{\imath}$ e $\hat{\jmath}$ indicados:



Agora vamos adotar um polo. O mais conveniente para nós adotarmos é o próprio centro de massa do disco, que é a origem do sistema de coordenadas.

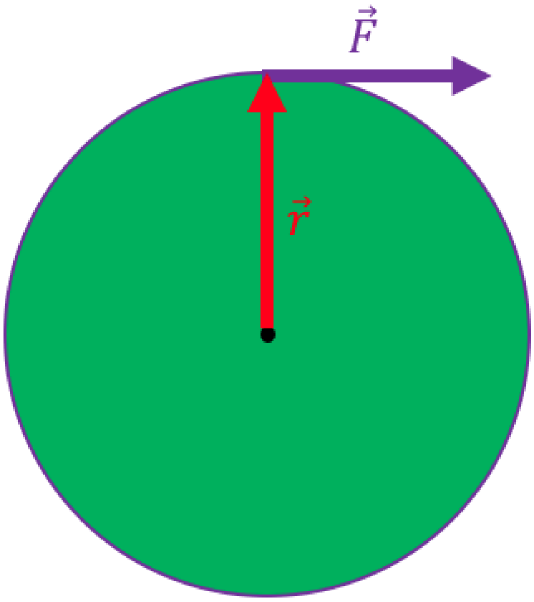
Agora vamos fazer o diagrama de forças desse disco. As forças que atuam nele é a $\vec{F}$ indicada, a força peso $\vec{P}$ e a força de reação do prego $\vec{N}$ indicadas abaixo:



Não sabemos a direção exata da força normal, mas isso não importa para esse exemplo, já que as forças $\vec{P}$ e $\vec{N}$ possuem torque nulo em relação à origem, pois o vetor $\vec{r}$ é nulo. Assim, apenas a força $\vec{F} = 2\hat{\imath}\ N$ possui torque. Dessa forma:

$$\vec{\tau}_{ext} = \vec{r} \times \vec{F}$$

O vetor $\vec{r}$ é o vetor posição do ponto de aplicação da força em relação ao polo (origem). O módulo desse vetor é o próprio raio de $1{,}0\ m$ do disco, e esse vetor aponta para cima, como indicado:



Isso fica $\vec{r} = 1\hat{\jmath}\ m$. Assim, vamos ter que o torque é:

$$\vec{\tau}_{ext} = \hat{\jmath} \times (2\hat{\imath})\ N \cdot m$$

$$\vec{\tau}_{ext} = -2\ \hat{k}\ N \cdot m$$

Agora podemos usar a Segunda Lei de Newton de Rotações:

$$\vec{\tau}_{ext} = I\vec{\alpha}$$

O momento de inércia de um disco em relação a um eixo que passa pelo seu centro de massa é conhecido, e é dado por:

$$I_{CM} = \frac{MR^2}{2}$$

Usando a massa de $2{,}0\ kg$ e o raio de $1{,}0\ m$, o momento de inércia é:

$$I = 1\ kg \cdot m^2$$

Por fim, vamos ter a igualdade:

$$1 \cdot \vec{\alpha} = -2\,\hat{k} \quad (SI)$$

Dando, por fim:

$$\vec{\alpha} = -2\,\hat{k}\ rad/s^2$$