www.estudar.com.vc

Trabalho e Energia

Trabalho de uma Força Variável 2D

Explicação

Quando aplicada em mais dimensões, o trabalho de uma força vai precisar de uma análise mais profunda. Para isso, vamos usar uma força $\vec{F}$ que varia com x e y da seguinte forma:

$$\vec{F}(x, y) = F_x(x, y) \cdot \hat{\imath} + F_y(x, y) \cdot \hat{\jmath}$$

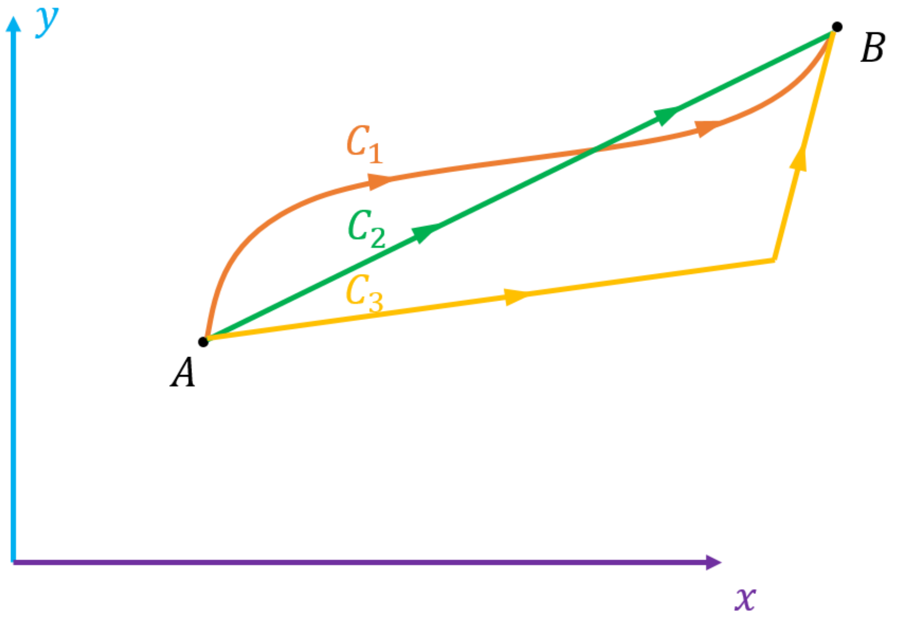
Vamos definir $d\vec{\ell}$:

$$d\vec{\ell} = dx\,\hat{\imath} + dy\,\hat{\jmath}$$

Por fim, vamos ter que o trabalho da força $\vec{F}$ dos pontos $A \rightarrow B$ vai ser:

$$W_{AB} = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$$

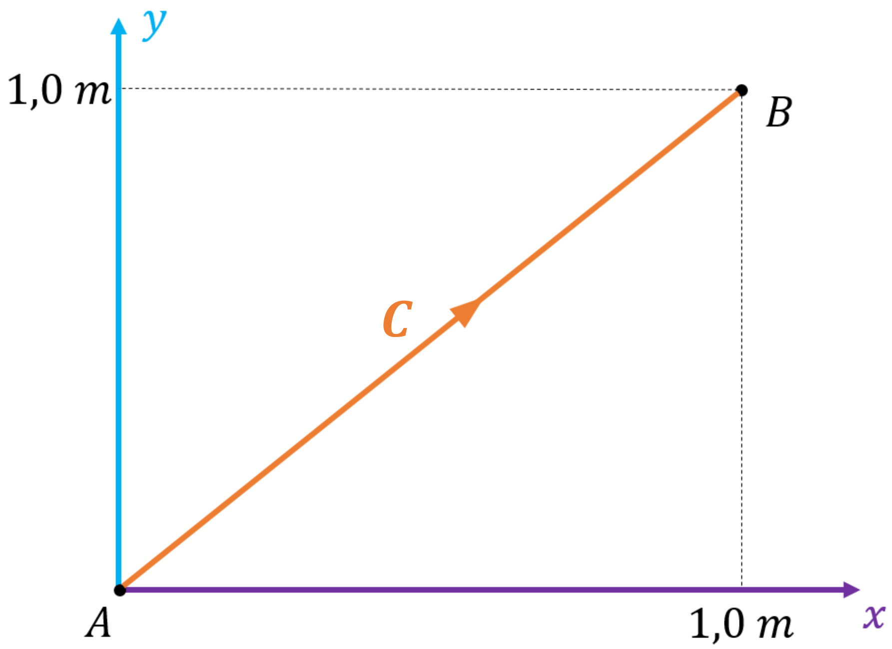
Isso é uma **integral de linha**. A grande novidade dela é que é preciso ver o **caminho C** que a partícula percorre de A até B:



Vamos para um exemplo. Imagine que uma partícula sofre uma força do tipo:

$$\vec{F} = 0 \cdot \hat{\imath} + x \cdot \hat{\jmath} = \boldsymbol{x} \cdot \hat{\boldsymbol{\jmath}} \quad (SI)$$

Ou seja, sofre uma força **vertical** (ou seja, na direção de $\hat{\jmath}$) que depende da posição **horizontal** $\boldsymbol{x}$. Digamos que ela começa na origem $(A = (0,0)\,m)$ e termina na posição $B = (1,1)\,m$, passando pelo caminho $y = x$:



Dessa forma, qual o trabalho da força $\vec{F}$ entre A e B (W_{AB})? Pela definição:

$$W_{AB} = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$$

Aplicando o produto escalar entre $\vec{F} = x\,\hat{\jmath}$ e $d\vec{\ell} = dx\,\hat{\imath} + dy\,\hat{\jmath}$, essa integral vira:

$$W_{AB} = \int_C (x\,\hat{\jmath}) \cdot (dx\,\hat{\imath} + dy\,\hat{\jmath}) = \int_C (x\,\hat{\jmath}) \cdot (dx\,\hat{\imath}) + (x\,\hat{\jmath}) \cdot (dy\,\hat{\jmath})$$

Fazendo cada produto escalar e separando a integral em duas, ficamos com:

$$W_{AB} = \int_{0}^{1} 0\ dx + \int_{0}^{1} x\ dy$$

Os extremos de cada integral são importantes. Na integral que tem dx, colocamos as coordenadas em x de $A = (0, 0)$ embaixo e de $B = (1, 1)$ em cima. E na integral que tem dy, colocamos as coordenadas em y de A e de B.

A primeira integral é zero, visto que a força já nem possui componente em x. Na segunda integral, temos uma integral de x em dy. Para fazer essa integral na mesma variável, precisamos da relação entre x e y da curva. Nesse caso, como $x = y$:

$$W_{AB} = \int_{0}^{1} y\ dy$$

Vamos ter que essa integral é:

$$W_{AB} = \left.\frac{y^2}{2}\right|_{0}^{1}$$

Ficando igual a:

$$W_{AB} = 0{,}50\ J$$